УДК 637.5

Учет сдвиговых деформаций в математической модели процесса обвалки реберного мяса.

Д.т.н. Пеленко В.В., Верболоз Е.И., к.т.н. Крысин А.Г.,
аспирант Азаев Р.А.

Решение, полученное в работах [1,2], может давать существенную погрешность в случае значительных деформаций и перемещений, что, как правило имеет место в реальных условиях. Эта погрешность обусловлена пренебрежением первой производной перемещения “y” в уравнениях для кривизны балки [5]:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{[\sqrt{1+(y')^2}\,]^3} \tag{1}$$

В приближенном решении задачи рассматривалась только изгибная жесткость балки [1,2]

Предполагалось, что сдвиговые деформации в поперечных сечениях отсутствуют.

Учета этих деформаций уже достаточно, чтобы обнаружить, что схема действия контактных сил в виде распределенной нагрузки “q” и сосредоточенной силы ($\frac{N}{2}$) является приближенной. При этом совершенно очевидно, что за счет сжатия балки в поперечном направлении сила $\frac{N}{2}$ будет распределена по некоторой малой площадке (как в обычных контактных задачах)[3].

Наиболее сложным и интересным в рассматриваемой задаче отрыва мякотной соединительной ткани от кости является возникновение сосредоточенной силы на границе участка прилегания [3], как это имеет место во всех задачах, где происходит соприкасание упругой балки (кости) с жесткой поверхностью (установочной пластиной). Возникновение этой силы как раз и связано с выбором расчетной схемы.

Кривизна кости, обусловленная изгибающим моментом, определяется величиной:

$$\frac{1}{\rho} = y''_{м} = \frac{M}{EI}, \tag{2}$$

Для прогибов y_Q, вызванных сдвигом, в любом сечении можем записать угол дополнительного наклона упругой линии в виде:

$$y'_Q = \frac{\xi Q}{GF}, \tag{3}$$

где ξ- числовой коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения балки.

Для прямоугольника , например, ξ=6/5, для круга ξ=10/9, [3,4].

Для сечения эллиптической формы можем записать ξ=52/45

Таким образом окончательно получаем:

$$y'' = \frac{M}{EI} - \frac{\xi Q'}{GF} \tag{4}$$

Знак минус у второго слагаемого обусловлен тем фактом, что при положительных направлениях действия M и Q, оба эти фактора дают изменения кривизны различного знака.

Учитывая одно из основных дифференциальных соотношений:

$$Q = \frac{dM}{dx}, \tag{5}$$

получаем дифференциальное уравнение изогнутой оси:

$$y'' = \frac{M}{EI} - \frac{\xi M''}{GF}, \tag{6}$$

В рассматриваемом случае нагружения реберной кости, при x<b уравнение для изгибающего момента запишется в виде [2]:

$$M = px - x\int_0^x q(x)dx + \int_0^x xq(x)dx, \tag{7}$$

Определим из (7) величину M'':

$$M' = p - \int_0^x q(x)dx - xq(x) + xq(x), \tag{8}$$

$$M'' = -q(x),$$

В соответствии с выражением (6) получаем:

$$y'' = \frac{1}{EI}[px - x\int_0^x q(x)dx + \int_0^x xq()xdx] + \frac{\xi q(x)}{GF}, \tag{9}$$

С учетом результатов полученных в работе [1]:

$$q(x) = \sigma_c N_0 [Y_1(\frac{kl}{2})Y_1(kx) + 4Y_4(\frac{kl}{2})Y_2(kx)],$$

тогда

$$y'' = \frac{1}{EI}\{px - \frac{1}{k}x\sigma_c N_0[Y_1(\frac{kl}{2})Y_2(kx) + 4Y_4(\frac{kl}{2})Y_3(kx)] +$$
$$+\sigma_c N_0 \frac{1}{k}Y_1(\frac{kl}{2})[xY_2(kx) - \frac{1}{k}Y_3(kx)] +$$
$$+4\sigma_c N_0 \frac{1}{k}Y_4(\frac{kl}{2})[xY_3(kx) - \frac{1}{k}Y_4(kx)]\} + \qquad (10)$$
$$+\frac{\xi}{GF}\sigma_c N_0[Y_1(\frac{kl}{2})Y_1(kx) + 4Y_4(\frac{kl}{2})Y_2(kx)];$$

Уравнение упругой линии кости (величину прогиба) получим, дважды интегрируя соотношение (10), предварительно упростив его.

$$y'' = \frac{1}{EI}\{px - \frac{\sigma_c N_0}{k^2}[Y_1(\frac{kl}{2})Y_3(kx) + 4Y_4(\frac{kl}{2})Y_4(kx)]\} +$$
$$+\frac{\xi}{GF}\sigma_c N_0[Y_1(\frac{kl}{2})Y_1(kx) + 4Y_4(\frac{kl}{2})Y_2(kx)] \qquad (11)$$

$$y' = \frac{1}{EI}\{p\frac{x^2}{2} - \frac{\sigma_c N_0}{k^2}[Y_1(\frac{kl}{2})\int_0^x Y_3(kx) + 4Y_4(\frac{kl}{2})\int_0^x Y_4(kx)dx]\} +$$
$$+\frac{\xi}{GF}\sigma_c N_0[Y_1(\frac{kl}{2})\int_0^x Y_1(kx)dx + 4Y_4(\frac{kl}{2})\int_0^x Y_2(kx)dx] \qquad (12)$$

Так как, в соответствии с таблицей функций Крылова [1,3], следуют соотношения:

$$\int_0^x Y_3(kx)dx = \frac{1}{k}Y_4(kx),$$

$$\int_0^x Y_4(kx)dx = -\frac{1}{4k}Y_1(kx)\Big|_0^x = -\frac{1}{4k}[Y_1(kx) - 1],$$

$$\int_0^x Y_1(kx)dx = \frac{1}{k}Y_2(kx),$$

$$\int_0^x Y_2(kx)dx = \frac{1}{k}Y_3(kx),$$

то поэтому:

$$y' = \frac{1}{EI}\{p\frac{x^2}{2} - \frac{\sigma_c N_0}{k^2}[Y_1(\frac{kl}{2})Y_4(kx) - 4Y_4(\frac{kl}{2})Y_1(kx) + Y_4(\frac{kl}{2})]\} + \\ + \frac{\xi}{GF}\sigma_c N_0 \frac{1}{k}[Y_1(\frac{kl}{2})Y_2(kx) + 4Y_4(\frac{kl}{2})Y_2(kx)] + c_1 \qquad (13)$$

Прогиб имеет вид следующей функции:

$$y = \frac{1}{EI}\{\frac{px^3}{6} - \frac{\sigma_c N_0}{k^3}[Y_1(\frac{kl}{2})\int_0^x Y_4(kx) - 4Y_4(\frac{kl}{2})\int_0^x Y_1(kx)dx + Y_4(\frac{kl}{2})x]\} + \\ + \frac{\xi}{GFk}\sigma_c N_0[Y_1(\frac{kl}{2})\int_0^x Y_2(kx)dx + 4Y_4(\frac{kl}{2})\int_0^x Y_3(kx)dx] + c_1 x + c_2 \qquad (14)$$

С учетом уже вычисленных значений интегралов, получаем

$$y = \frac{1}{EI}\{\frac{px^3}{6} - \frac{\sigma_c N_0}{k^4}[Y_1(\frac{kl}{2})(1 - Y_4(kx))\frac{1}{4} - 4Y_4(\frac{kl}{2})Y_2(kx) + xY_4(\frac{kl}{2})]\} + \\ + \frac{\xi\sigma_c N_0}{GFk^2}[Y_1(\frac{kl}{2})Y_3(kx) + 4Y_4(\frac{kl}{2})Y_4(kx)] + c_1 x + c_2 \qquad (15)$$

Постоянные интегрирования c_1 и c_2 найдем из условий:
при x=b, $y' = 0$; y=0.

$$c_1 = \frac{-1}{EI}\{\frac{pb^2}{2} - \frac{\sigma_c N_0}{k^3}[Y_1(\frac{kl}{2})Y_4(kb) - 4Y_4(\frac{kl}{2})Y_1(kb) + Y_4(\frac{kl}{2})]\} + \\ + \frac{\xi}{GFk}[Y_1(\frac{kl}{2})Y_2(kb) + 4Y_4(\frac{kl}{2})Y_3(kb)] \qquad (16)$$

$$c_2 = -\frac{1}{EI}\{\frac{pb^3}{6} - \frac{\sigma_c N_0}{k^4}[Y_1(\frac{kl}{2})(1 - Y_1(kb))\frac{1}{4} - 4Y_4(\frac{kl}{2})Y_2(kb) + bY_4(\frac{kl}{2})]\} + \\ + \frac{\xi\sigma_c N_0}{GFk}[Y_1(\frac{kl}{2})Y_3(kb) + 4Y_4(\frac{kl}{2})Y_4(kx)] + c_1 b \qquad (17)$$

Таким образом, уравнение упругой линии на участке отрыва кости x≤b определено однозначно соотношениями (15), (16), (17)

На оставшемся участку x>b кривизна равна нулю, поэтому в соответствии с уравнением (6) имеем:

$$M'' - \alpha^2 M = 0, \qquad (18)$$

здесь $\alpha^2 = \frac{GF}{EI\xi}$.

Решение дифференциального уравнения имеет следующий вид:

$$M = c_3 sh\alpha x + c_4 ch\alpha x. \qquad (19)$$

При $x = b$, имеем в соответствии с [2]:

$$M = Pb - \frac{\sigma_c N_0}{k}[Y_1(\frac{kl}{2})Y_3(kb) + Y_4(\frac{kl}{2})Y_4(kb)]$$

при x = l, M = 0

Из этих условий определяем произвольные постоянные c_3 и c_4:

$$0 = c_3 sh\alpha l + c_4 ch\alpha l\ ;\quad c_4 = -c_3 th\alpha l\ ;$$

$$c_3 sh\alpha b + c_4 ch\alpha b = Pb - \frac{\sigma_c N_0}{k}[Y_1(\frac{kl}{2})Y_3(kb) + Y_4(\frac{kl}{2})Y_4(kb)];$$

$$C_3(sh\alpha b - \frac{ch\alpha b sh\alpha l}{ch\alpha l}) = Pb - \frac{\sigma_c N_0}{k}[Y_1(\frac{kl}{2})Y_3(kb) + Y_4(\frac{kl}{2})Y_4(kb)];$$

$$C_3 = \{Pb - \frac{\sigma_c N_0}{k}[Y_1(\frac{kl}{2})Y_3(kb) + Y_4(\frac{kl}{2})Y_4(kb)]\}(sh\alpha b \frac{ch\alpha l}{sh\alpha(l-b)});\qquad (20)$$

$$c_4 = \{Pb - \frac{\sigma_c N_0}{k}[Y_1(\frac{kl}{2})Y_3(kb) + Y_4(\frac{kl}{2})Y_4(kb)]\}\frac{sh\alpha l}{sh\alpha(l-b)}.\qquad (21)$$

Таким образом однозначно определен закон изменения изгибающего момента M с учетом действия поперечных сил:

$$M = \{Pb - \frac{\sigma_c N_0}{k}[Y_1(\frac{kl}{2})Y_3(kb) + Y_4(\frac{kl}{2})Y_4(kb)]\}[\frac{sh\alpha l}{sh\alpha(l-b)}ch\alpha x -$$
$$- \frac{ch\alpha l}{sh\alpha(l-b)}sh\alpha x].\qquad (22)$$

Величина “b” определяется из условия равенства поперечных сил в сечении сопряжения участков.

При x = b, производная изгибающего момента, определяемого выражением (7), равна производной изгибающего момента определяемого выражением (19), поэтому:

$$P - \int_0^b q(x)dx = c_3\alpha ch\alpha b + c_4\alpha sh\alpha b;\qquad (23)$$

$$P - \int_0^b \sigma_c N_0[Y_1(\frac{kl}{2})Y_1(kx) + 4Y_4(\frac{kl}{2})Y_2(kx)]dx =$$

$$= P - \sigma_c N_0[\int_0^b Y_1(\frac{kl}{2})Y_1(kx)dx + \int_0^b 4Y_4(\frac{kl}{2})Y_2(kx)dx] =$$

$$= P - \frac{\sigma_c N_0}{k}{}_0[Y_1(\frac{kl}{2})Y_2(kb) + 4Y_4(\frac{kl}{2})Y_3(kb)].$$

Таким образом:

$$P-\frac{\sigma_c N_0}{k}{}_{0}[Y_1(\frac{kl}{2})Y_2(kb)dx+4Y_4(\frac{kl}{2})Y_3(kb)]=$$

$$\alpha\{Pb-\frac{\sigma_c N_0}{k}[Y_1(\frac{kl}{2})Y_3(kb)+Y_4(\frac{kl}{2})Y_4(kb)]\}[\frac{sh\alpha l sh\alpha b}{sh\alpha(l-b)}- \qquad (24)$$

$$-\frac{ch\alpha l ch\alpha b}{sh\alpha(l-b)}].$$

С учетом зависимости, полученной в работе [1]:

$$N_0=\frac{N}{8EIk^3}\frac{1}{Y_1(\frac{kl}{2})Y_2(\frac{kl}{2})+Y_3(\frac{kl}{2})Y_4(\frac{kl}{2})]},$$

и принятого в работе [2] соотношения:

20P=N,

уравнение (24) приведем к виду:

$$1-\frac{5\sigma_c}{2EIk^4}\frac{Y_1(\frac{kl}{2})Y_2(kb)+Y_4(\frac{kl}{2})Y_3(kb)}{Y_1(\frac{kl}{2})Y_2(\frac{kl}{2})+Y_3(\frac{kl}{2})Y_4(\frac{kl}{2})}=$$

$$\alpha\{[b-\frac{5\sigma_c}{2EIk^4}[\frac{Y_1(\frac{kl}{2})Y_2(kb)+Y_4(\frac{kl}{2})Y_3(kb)}{Y_1(\frac{kl}{2})Y_2(\frac{kl}{2})+Y_3(\frac{kl}{2})Y_4(\frac{kl}{2})}]\}* \qquad (25)$$

$$*[\frac{sh\,\alpha l sh\,\alpha b-ch\,\alpha l ch\,\alpha b}{sh\,\alpha(l-b)}].$$

Решая полученное уравнение относительно “b”, определим координату точки отрыва мякотной ткани от реберной кости.

Подставляя значение “b” в соотношение (22) найдем величину изгибающего момента в сечении отрыва с учетом действия поперечных сил нагружения.

Построение эпюры изгибающего момента по этому соотношению позволяет найти его максимальное значение и координату этого максимума. По абсциссе максимального изгибающего момента можно уточнить минимальный размер пластинчатой ячейки установочной пластины.

Список литературы

1. В.В.Пеленко, Е.И.Верболоз, Р.А.Азаев, Р.А.Иванов, Е.В.Фукс. Математическая модель процесса обвалки реберного мяса. Межвуз. Сб. науч. Тр. "Энергосберегающие технологии и оборудование пищевой промышленности ". С-Пб.: СПбГУНиПТ, 2006.
2. В.В.Пеленко, Е.И.Верболоз, Р.А.Азаев, Н.А.Зуев, В.В.Кузьмин. Расчет параметров процесса отрыва реберной кости от соединительной ткани мясной основы. Межвуз. Сб. науч. Тр. "Энергосберегающие технологии и оборудование пищевой промышленности ". С-Пб.: СПбГУНиПТ, 2006.
3. В.И.Феодосьев. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1967. 376с.
4. Справочник машиностроителя. Том 3. Под ред. С.В.Серенсена. М.: Машгиз, 1962. 654с.
5. Ю.Н.Работнов. Сопротивлении материалов. М.: Физматгиз, 1962. 456с.