УДК 637.5

Расчет параметров процесса отрыва реберной кости от соединительной ткани мясной основы.

Д.т.н. Пеленко В.В., к.т.н. Зуев Н.А., аспиранты Азаев Р.А., Кузьмин В.В.

Необходимость снижения доли тяжелого ручного труда и повышения производительности процесса обвалки реберного мяса привела к появлению ряда технических решений, которые требуют своего математического описания для основных технологических режимов и конструктивных параметров соответствующих установок.

Один из вариантов процесса обвалки заключается в том что, предварительно, с внутренней стороны реберного блока разрезается вдоль реберных костей соединительная ткань и удаляется с их верней части.

После этого реберный блок укладывается на установочную пластину и прижимается к ней специальными стержнями, укладываемыми на межреберную мясную тканью

Далее, воздействуя на крайнее сечение кости отрывающим усилием, кость консольно отделяют от соединительной ткани, оставшейся на ее нижней поверхности.

Расчетная схема такого процесса обвалки приведена на рисунке 1.

$$q=\sigma_c=\frac{N}{l}=\frac{20P}{l}$$

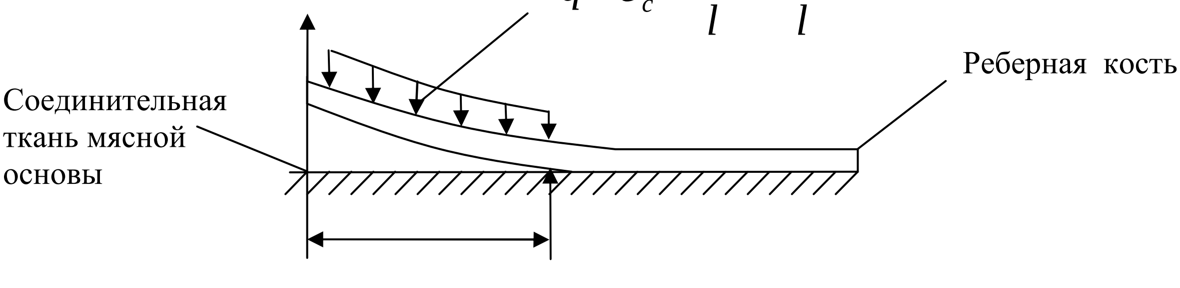

Рис.1. Расчетная схема отделения кости от соединительной ткани.

После приложения силы P левая часть кости приподнимается на некоторой длине “b”.

Правая часть кости будет лежать на установочной пластине и останется прижатой. Таким образом, во всех сечениях с координатой $x \geq b$ изгибающий момент равен нулю. Из этого условия можно определить длину отрезка “b”, выражая его через силу “P” и распределенную нагрузку “q”. Наиболее простой вариант имеет место для случая равномерно распределенной нагрузки [1]. В поставленной нами задаче нагрузка распределена линейно относительно величины прогиба (q=-ay) и решение задачи существенно усложняется.

1. Рассмотрим простейший вариант [1], когда

$$q = \sigma_c = const$$

σ_c - адгезионная прочность соединительной ткани, Н/М.

$$Pb - \sigma_c \frac{b^2}{2} = 0, \text{ откуда } b = \frac{2P}{\sigma_c}, \quad (1)$$

Для отрыва реберной кости от соединительной ткани одновременно по всей поверхности адгезии требуется усилие N:

$$N = \sigma_c l, \quad (2)$$

где l - длина реберной кости.

Рассчитаем процесс отрыва реберной кости в предположении, что прикладываемое усилие P составляет одну двадцатую часть (отношение длины кости к ширине ее) от максимально необходимого и обеспечивает гарантированный отрыв:

$$20P = N, \quad (3)$$

В этом случае величина “b” на которой приподнимается кость отрываясь от соединительной ткани составит значение:

$$b = 0{,}1l, \quad (4)$$

Из условия равновесия сил в проекции на вертикальную ось “у” следует, что в точке x=b опорная пластина дает реакцию Р и процесс дальнейшего отрыва реберной кости будет продолжаться далее. Возникновение сосредоточенной силы Р на границе участка прилегания кости к опорной пластине на первый взгляд является неожиданным, хотя на это четко указывает уравнение равновесия:

$$P - qb + R_y = 0, \quad (5)$$

$$R_y = qb - P; \quad R_y = \frac{N}{l} b - P; \quad R_y = \frac{N}{l}\frac{2P}{\sigma_c} - P;$$

Но с учетом (2) $N = \sigma_c l$, тогда:

$$R_y = \frac{N2P}{N} - P; \; R_y = 2P - P;$$

$$R_e = P; \quad (6)$$

Таким образом, действительно, возникновение сосредоточенного отрывающего усилия “Р” в месте отрыва кости от соединительной ткани физически и математически обусловлено выбранной схемой отрыва.

Максимальный изгибающий момент будет достигаться в середине приподнятого участка “b”:

$$M = Px - \frac{qx^2}{2N};\tag{7}$$

при x=b/2

$$M_{\max} = \frac{qb^2}{8} = \frac{P^2 l}{2N};\tag{8}$$

Для условия нагружения $20P = N$, получим:

$$M_{\max} = \frac{Pl}{40} = \frac{Nl}{800} = \frac{\sigma_c l^2}{800},\tag{9}$$

2. Рассмотрим случай линейного закона изменения распределенной нагрузки, вызванной силами адгезии соединительной ткани мясной основы к кости, иллюстрируемый рисунком 2.

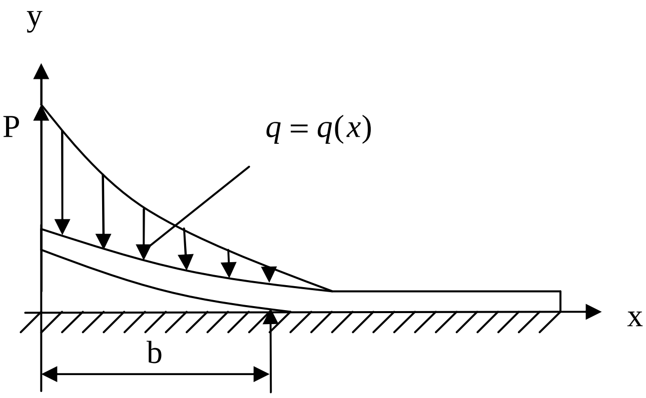

Рис.2. Расчетная схема для случая линейного распределения внутренних усилий адгезии.

Функциональная зависимость q=q(x) описывается следующим выражением:

$$q = \sigma_c (1 - \frac{x}{b}),\tag{10}$$

Уравнения моментов для нахождения величины “b” принимают следующий вид:

$$Px - Q\frac{2}{3}x = 0,\tag{11}$$

где Q - равнодействующая линейно распределенной нагрузки;

$$Q = \frac{\sigma_c + \sigma_c (1 - \frac{x}{b})}{2} x;\tag{12}$$

$$Px - (2\sigma_c - \frac{\sigma_c}{b}x)\frac{x^2}{3} = 0;\tag{13}$$

При $x=b$ получаем

$$P = (\frac{2}{3}\sigma_c - \frac{\sigma_c}{3})b;\tag{14}$$

Откуда следует, что

$$b = \frac{3P}{\sigma_c}; \tag{15}$$

В таком случае абсцисса точки отрыва кости от мякотной ткани определится по соотношению:

$$b = \frac{3\frac{N}{20}}{N} l = 0{,}15l, \tag{16}$$

Абсциссу максимального изгибающего момента найдем из условия экстремума выражения:

$$M = Px - \frac{2}{3}\sigma_c x^2 + \frac{\sigma_c}{3b} x^3, \tag{17}$$

$$M' = P - \frac{4\sigma_c}{3} x + \frac{\sigma_c}{b} x^2 = 0, \tag{18}$$

$$M'' = -\frac{4\sigma_c}{3} + \frac{2\sigma_c}{b} x, \tag{19}$$

Рассмотрим (18) относительно x:

$$x^2 - \frac{4}{3}bx + \frac{Pb}{\sigma_c} = 0, \tag{20}$$

$$x = \frac{2}{3}b \pm \sqrt{\frac{4}{9}b^2 - \frac{bl}{20}}, \tag{21}$$

Так как для реальных соотношений размеров кости в соответствии с (16) $l = \frac{b}{0{,}15}$, то:

$$x = \frac{b}{3} = 0{,}05l, \tag{22}$$

Максимальное значение изгибающего момента составит, в соответствии с (17),(15) и (16) величину:

$$M_{\max} = \frac{\sigma_c l^2}{900}, \tag{23}$$

Как видим, это величина на 12.5% меньше предыдущего случая и вероятность разрушения реберной кости при обвалке снижается.

3. Рассмотрим теперь случай задания закона изменения распределенной нагрузки в произвольной форме, и, в частности в форме функций Крылова, полученной в работе [2]:

$$q = -ay$$

$$y = -N_0\left[Y_1(\frac{kl}{2})Y_1(kx) + 4Y_4(\frac{kl}{2})Y_2(kx)\right]$$

В работе [2] нами было принято: $a = \sigma_c$

Таким образом, закон распределения адгезионных внутренних усилий при отрыве кости от соединительной ткани с мясной основой имеет следующий общий вид:

$$q(x) = \sigma_c N_0 \left[Y_1(\frac{kl}{2}) Y_1(kx) + 4Y_4(\frac{kl}{2}) Y_2(kx) \right], \tag{24}$$

Соответствующее уравнение моментов для нахождения координаты “b” в точке отрыва мякотной ткани от кости имеет форму:

$$M = Px - Q(x - x_{ц.д.}) = 0, \tag{25}$$

$Q = \int_0^x q dx$ - равнодействующая сосредоточенная сила.

$x_{ц.д.} = \dfrac{\int_0^x xq(x)dx}{\int_0^x q(x)dx}$ - абсцисса точки приложения сосредоточенной силы.

Откуда получаем:

$$Px - \int_0^x xq(x)dx \left[x - \frac{\int_0^x xq(x)dx}{\int_0^x q(x)dx} \right] = o; \tag{26}$$

или:

$$Px - x\int_0^x q(x)dx + \int_0^x xq(x)dx = 0; \tag{27}$$

С учетом (24) запишем:

$$\begin{aligned} M = Px - \{x\sigma_c N_0 \int_0^x \left[Y_1(\frac{kl}{2}) Y_1(kx) + 4Y_4(\frac{kl}{2}) Y_2(kx) \right] dx + \\ + \int_0^x x\sigma_c N_0 \left[Y_1(\frac{kl}{2}) Y_1(kx) + 4Y_4(\frac{kl}{2}) Y_2(kx) \right] dx\} = 0 \end{aligned}, \tag{28}$$

Из таблицы функций Крылова [1,2] следует что:

$$\frac{d}{dx}\left[Y_2(kx) \right] = kY_1(kx), \tag{29}$$

Поэтому:

$$\int_0^x Y_1(kx)dx = \frac{1}{k}Y_2(kx), \qquad (30)$$

Аналогично получим:

$$\int Y_2(kx)dx = \frac{1}{k}Y_3(kx), \qquad (31)$$

Вычислим интегралы более сложных симплексов. Интегрируя по частям, получаем:

$$\int_0^x xY_1(kx)dx = \frac{x}{k}Y_2(kx) - \frac{1}{k^2}Y_3(kx), \qquad (32)$$

Аналогично:

$$\int_0^x xY_2(kx)dx = \frac{x}{k}Y_3(kx) - \frac{1}{k^2}Y_4(kx), \qquad (33)$$

Окончательно уравнение (28) примет вид:

$$\begin{aligned} &Px - x\sigma_c N_o \frac{1}{k}\left[Y_1(\frac{kl}{2})Y_2(kx) + 4Y_4(\frac{kl}{2})Y_3(kx)\right] + \\ &+\{\sigma_c N_0 \frac{1}{k}Y_1(\frac{kl}{2})\left[xY_2(kx) - \frac{1}{k}Y_3(kx)\right] + \\ &+ 4\sigma_c N_0 \frac{1}{k}Y_4(\frac{kl}{2})\left[xY_3(kx) - \frac{1}{k}Y_4(kx)\right]\} = 0 \end{aligned}, \qquad (34)$$

при $x = b$, получим:

$$Pb - \frac{\sigma_c N_0}{k^2}\left[Y_1(\frac{kl}{2})Y_3(kb) + Y_4(\frac{kl}{2})Y_4(kb)\right] = 0, \qquad (35)$$

Решая это трансцендентное уравнение численно относительно “b”, определяем абсциссу точки отрыва реберной кости от мякотной ткани.

Далее по уравнению (28) строим эпюру моментов внутренних усилий $M=M(x)$ и находим $M_{\max}$, а так же абсциссу X_m, в которой этот максимум достигается.

Эта величина и может быть принята за минимальный размер ширины пластинчатых ячеек, из которых шарнирно компонуется опорная пластина.

Список литературы

1. В.И. Феодосьев. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1967. 376 с.
2. Пеленко В.В., Азаев Р.А., Иванов Р.А., Фукс Е.В. Математическая модель процесса обвалки реберного мяса. Межвузовский сборник научных трудов. «Ресурсосберегающие технологии и оборудование пищевой промышленности». СПб., СПбГУНиПТ, – 2006.