

Научная статья

УДК 541.182; 532.7; 664.3

DOI: 10.17586/2310-1164-2026-19-3-31-42

Математическое моделирование процесса прессования семян подсолнечника и отжима масла на основе логистического уравнения

А.С. Старков¹, Г.Е. Мельник^{2*}, И.А. Старков², А.Н. Мануйлов²¹Университет ИТМО, Россия, Санкт-Петербург²ВНИИЖиров, Россия, Санкт-Петербург

*genmelnik@yandex.ru

Аннотация. Исследовали процесс прессования подготовленных семян подсолнечника и отжима масла на лабораторной установке в цилиндрической ячейке. Для оценки процесса принята такая интегральная характеристика, как выход прессового масла. Использование относительно простой линейной модели процесса интересно тем, что она может послужить научным прецедентом для разработки новых моделей, которые, сохраняя физическую адекватность, позволяют получить аналитические зависимости и выделить ключевые управляющие параметры процесса. Примером такой феноменологической модели может послужить логистическая модель, разработанная на основе классического уравнения роста Ферхюльста. Данный подход может быть оправдан и применен для получения аналитического выражения зависимости количества оставшегося в жмыхе масла от времени, где каждый параметр (скоростная константа, асимптотический остаток, критический порог) имеет свою четкую физическую интерпретацию, связанную со свойствами маслосодержащего материала и режимами процесса прессования и отжима масла. Экспериментально получены кинетические кривые процесса прессования подсолнечной мезги для двух разных режимов прессования и отжима масла. При обработке этих данных выведено обобщенное логистическое уравнение для содержания масла $M(t)$ в прессуемом материале. По результатам исследований разработаны предложения для решения ряда задач, включая производственные.

Ключевые слова: переработка семян масличных культур; прессование маслосодержащего материала; отжим масла; логистическое уравнение Ферхюльста; переработанные семена подсолнечника

Original article

Mathematical modeling of pressing sunflower seeds and oil extraction based on the logistic equation

Alexander S. Starkov¹, Gennady E. Melnik^{2*}, Ivan A. Starkov², Andrey N. Manuylov²¹ITMO University, St. Petersburg, Russia²All-Russian Research Institute of Fats, St. Petersburg, Russia

*genmelnik@yandex.ru

Abstract. The authors investigated the process of pressing prepared sunflower seeds and extracting oil on a laboratory unit in a cylindrical cell. To evaluate the process, such an integral characteristic as the yield of pressed oil is adopted. The use of a relatively simple linear model is promising as it can serve as a foundation for developing new models that, while maintaining physical adequacy, allows obtaining analytical dependencies and identify key control parameters of the process. An example of such a phenomenological model, according to the authors, is the logistic model developed on the basis of the classical Verhulst growth equation. This approach may well be justified and applied to obtain an analytical expression of the dependence of the amount of oil remaining in the cake on time, where each parameter (velocity constant, asymptotic residue, and critical threshold) has its own clear physical interpretation related to the properties of the oil-containing material and the modes of the oil pressing and pressing process. Kinetic curves of the sunflower pulp pressing process have been experimentally obtained for two different modes of oil pressing and pressing. By processing these data, a generalized logistic equation for the oil content $M(t)$ in the pressed material was obtained. Based on the research results, some proposals have been developed to solve problems, including production ones.

Keywords: oilseed processing; pressing of oil-containing material; oil extraction; Verhulst logistic equation; processed sunflower seeds

Введение

Изучение процессов прессования масличного материала и отжима масла были и остаются значимыми для исследователей. Учитывая их сложность, ученые и специалисты используют в своей

работе современные подходы – систематизацию, моделирование и др. Существующие математические модели отжима масла из растительного сырья делятся на три принципиальные группы: эмпирические (подгонка кривых), фильтрационно-реологические (физика потоков) и численные (компьютерное моделирование). Каждая из них решает свой класс задач и имеет строго определенную область применимости.

Эмпирические модели (логистическая) [1], степенная модель Сингха, двухфракционная биэкспонента) являются самыми простыми в использовании. Их главное преимущество – минимальный набор входных данных. Однако они не дают физического понимания процесса и критически зависят от конкретной конструкции пресса. Логистическая модель выделяется на их фоне, так как вносит физическую интерпретацию входящих в нее коэффициентов [2].

Фильтрационная модель Ширато [3] занимает центральное место в инженерной практике. В отличие от эмпирики, она базируется на законе Дарси и учитывает ключевые физические параметры: вязкость масла, перепад давления, сопротивление сжимаемого осадка и проницаемость фильтрующей перегородки. Однако модель Ширато имеет серьезное ограничение: она работает только при постоянном давлении и только на первой стадии фильтрации. Как только давление переходит на твердый скелет (консолидация), скорость отжима перестает подчиняться Дарси. Для использования модели Ширато необходимо знать множество параметров маслосодержащей смеси в канале маслопресса, которые чрезвычайно трудно получить как экспериментально, так и в результате численных расчетов. Ввиду этого в данной работе ограничимся логистической моделью.

Моделирование линейных и нелинейных процессов при прессовании семян подсолнечника приводится в работе [4]. Линейный процесс был реализован в цилиндрической ячейке с плунжером. Фиксировались параметры процесса прессования семян и отжима масла. Выход масла оценивали в зависимости от геометрических параметров ячейки и прикладываемого давления. Нелинейный процесс прессования семян и отжима масла изучен на экспериментальном шнековом прессе FL-200, в котором геометрия шнеков приведена в соответствие с теоретическими данными, полученными при изучении линейного процесса. Математическая модель с использованием нелинейной регрессионной кривой, примененная в исследовании, продемонстрировала надежность при описании линейных и нелинейных процессов прессования семян. Разделение процессов прессования семян и отжима масла на линейные и нелинейные заслуживает особого внимания, так как системный подход позволяет четко разделять их на две группы.

Авторы [5] рассматривали влияние давления, температуры и влажности на выход масла и скорость традиционного гидравлического отжима семян кунжута и льна, а также влияние давления и температуры на выход рапсового, пальмоядрового масел, и масла из семян ятрофы. Выход масла увеличивался с повышением давления и температуры. Скорость прессования описана моделью Ширато.

При исследовании скорости оттока масла из измельченных масличных семян в камере с подвижным плунжером при наложении внешней нагрузки [6] изучаемый материал был представлен двухфазной смесью: пористый скелет-масло. Для изучения процесса отжима применено континуальное описание. Оба компонента смеси выражены балансовым уравнением. Свойства компонентов описаны с применением модели вязкой жидкости, в которой вязкость пористого скелета предполагается зависящей от давления. Численное решение задачи осуществили в двумерной постановке для среднего сечения камеры прессования с применением метода конечных элементов. Основные неизвестные: поля скорости и давления компонентов. Дискредитация области выполнена линейно-квадратичным порядком аппроксимации полей давления и скорости соответственно. Показано, что значительное влияние на расход отжатого масла оказывает изменение пористости.

Разработанные в [7] D-оптимальные планы экспериментов (т. е. такие схемы постановки опытов, которые обеспечивают максимальную информативность при минимальном их количестве) для одноосного отжима масла из семян, орехов и других видов масличного сырья в трех вариантах модели определены как простые псевдо-точечные, так и псевдо-непрерывные планы экспериментов. Они включают мгновенное приложение давления, ступенчатое приложение давления и синусоидальное приложение давления. Результаты показали, что эффективность планов зависит от величины приложенного давления и, в гораздо меньшей степени, от скорости и способа его приложения.

В большинстве случаев максимальная стандартизированная дисперсия для простых псевдо-точечных планов составляла 1,005 или меньше. Псевдо-непрерывные планы были полезнее только в случае, когда максимальная стандартизированная дисперсия простых псевдо-точечных планов превышала 1,02.

Модель для определения механических свойств семян рапса трехмерным методом дискретных элементов при прессовании приводится в работе [8]. Семена рапса рассматривали как набор точек при линейном моделировании сжатия упругого материала с кулоновским трением и когезионными связями. Механические свойства семян были проверены на соответствие фактическим результатам измерений с использованием одноосной камеры сжатия. Получены следующие микромеханические параметры: нормальная жесткость частиц (437 кН/м), прочность частиц на сдвиг (100 кН/м), коэффициент трения между частицами (0,5), коэффициент трения частицы о поверхность (0,2), нормальная жесткость поверхности (1311 кН/м), прочность на сдвиг поверхности (300 кН/м), локальный коэффициент демпфирования (0,7).

Анализ рассмотренных источников, включая также [9–13], показывает, что моделирование линейного процесса прессования семян и отжима масла является инструментом, широко используемым специалистами. Его применение существенно упрощает экспериментальную базу и проведение исследований, а полученные результаты в большинстве случаев позволяют ускорить их реализацию применительно к промышленному оборудованию. Для оценки линейного процесса прессования маслянистого материала и отжима масла большинство ученых используют такую характеристику, как выход прессового масла, так как она является «собирательной», показывающей насколько эффективно в своих проявлениях протекает процесс.

В то же время моделирование нелинейного процесса в шнековом прессе значительно сложнее во всех его аспектах [4, 14, 15] и, основанное на традиционном численном решении уравнений гидродинамики для канала шнека, оно требует значительных вычислительных ресурсов и сложных реологических конститутивных соотношений. По этой причине использование относительно простой линейной модели процесса остается интересным для исследования тем, что может послужить научным прецедентом по разработке новых моделей, которые, сохраняя физическую адекватность, позволяют получить аналитические зависимости и выделить ключевые управляющие параметры процесса. Примером такой феноменологической модели, по мнению авторов настоящей публикации, может послужить логистическая модель, разработанная на основе классического уравнения роста Ферхюльста [16]. Этот неординарный подход вполне может быть оправдан и применен для получения аналитического выражения зависимости количества оставшегося в жмыхе масла от времени, где каждый параметр (скоростная константа, асимптотический остаток, критический порог) имеет свою четкую физическую интерпретацию, связанную со свойствами маслосодержащего сырья и режимами прессования и отжима масла.

Цель данного исследования – моделирование процесса прессования и отжима масла из подготовленных семян подсолнечника и описание процесса с применением логистической модели Ферхюльста.

Объекты и методы исследования

Объектом исследования стали переработанные семена подсолнечника (ядро, мезга) и готовые продукты проведенных экспериментов (прессовое масло, жмых). Семена подсолнечника урожая 2025 г. выращены сельхозпроизводителями в различных регионах Республики Башкортостан. Использованный для изучения полупродукт (ядро семян подсолнечника) выработан при переработке семян подсолнечника на ООО «Чишминский МЭЗ». Масличность семян подсолнечника (заводская смесь товарных семян от нескольких производителей) – 40,97% при влажности 4,70% и сорности 3,29%; кислотное число масла в семенах 0,60 мг КОН/г.

Процесс прессования подготовленных семян подсолнечника (мезга) и отжима масла осуществляли с применением лабораторной установки, включающей гидравлический пресс (завод «Физприбор», Россия), закрытая система которого заполнена гидравлической жидкостью для создания давления. На перемещаемую площадку пресса устанавливали цилиндрический зеер с плотно пригнанным плунжером (вместе – ячейка для прессования), сконструированный и изготовленный во ВНИИЖиров

(Россия). При возвратно-поступательных движениях рычага пресса жидкость нагнеталась в систему, перемещая площадку и ячейку с мезгой, плунжер упирался в перекладину пресса, перемещался в зере, сжимая мезгу; создаваемое в мезге давление приводило к отжиму растительного масла. Полный объем зера 270 см³, общая площадь поперечного сечения отверстий для отвода отжимаемого масла в обечайке и днище¹ – 193 мм². Дополнительно прибор оборудовали поддоном для сбора отжатого масла; с поддона масло стекало в стакан на весах для фиксирования массы масла (с нарастающим итогом); использовались лабораторные весы электронные DL-202 (платформа диаметром 130 мм) с пределами взвешивания 0,2–200 г, точность 0,01 г, 2 класс точности (ChangZhou XingYun Electronic Equipment Co., Китай). Давление в гидравлической жидкости измеряли образцовым манометром МО-11201 серии МО-160 мм (завод «Теплоприбор», Россия), класс точности 0,4% со шкалой 250 делений, диапазон 0...0,1 МПа (0...1 кгс/см²), max давление 250 кгс/см², которое затем пересчитывали в давление в прессуемом материале. Для измерения высоты прессуемого материала прибор оборудовали индикатором часового типа ИЧ-100 (Челябинский инструментальный завод, Россия): класс 1, пределы измерения 0...100 мм, цена деления 0,01 мм. Для отсчета времени использовали секундомер электронный RGK SWE-01 (Shanghai SASEY Trade Co., Китай) с пределами абсолютной погрешности измерений интервалов времени $\pm (5,0 \cdot 10^{-5} \cdot T_x + 0,01)$: T_x – значение измеренного интервала времени, с; дискретность отсчета времени 0,01 с. Во время эксперимента все показания весов, манометра, индикатора и секундомера с момента начала отсчета времени (включения секундомера) и до его завершения одновременно и непрерывно записывались на цифровую видеокамеру Canon MVX330i (Canon Inc., Япония) в режиме «Film-Фильм».

Для экспериментов по изучению процесса прессования и отжима масла, которые выполнялись на стенде ВНИИЖиров, применяли исходный масличный материал (мезгу), приготовленный из ядра семян подсолнечника.

Приготовление мезги для отжима масла в промышленных условиях применительно к традиционной схеме форпрессование–экстракция, как известно, предусматривает выполнение следующих операций: очистка семян; обрушивание семян; разделение рушанки; измельчение ядра семян (с лузжистостью 8–10%) в мятку (проход не менее 60% материала через 1 мм сито); жарение (влаготепловая обработка) мятки.

В нашем случае для приготовления мезги с целью упрощения процесса ее подготовки в условиях экспериментального стенда ВНИИЖиров были использованы не семена подсолнечника, а ядро из семян подсолнечника, выработанное на Чишминском маслоэкстракционном заводе. Масличность ядра семян подсолнечника составляла 56,47% при влажности 3,62%; лузжистость ядра – 8,32%².

Измельчение ядра проводили в лабораторной дисковой мельнице LM 3610 (Perten Instruments, Швеция) производительностью 3–5 г ядра/с (50 г за 10–15 с); качество измельчения: в продукте (мятке) проход через 1 мм сито должен составлять не менее 60%. Перед каждым экспериментом измельчали 300 г ядра.

Операцию жарения (влаготепловая обработка) мятки выполняли в шкафе сушильном ПИС-40-02 СПУ мод. 2204 (Смоленское СКТБ СПУ, Россия) с принудительной конвекцией воздуха в рабочей камере объемом 40 л, диапазоном рабочих температур 50...200°C, потребляемой мощностью до 1,5 кВт, отклонением температуры от заданной $\pm 3^\circ\text{C}$. Перед жарением мятку увлажняли до влажности 8–9%, образец в цилиндрическом стеклянном стакане, накрытом стеклянной пластиной с высверленным в ней небольшим отверстием (заранее выверенного сечения) для отвода пара помещали в разогретую до нужной температуры камеру шкафа и в течение 40 мин подсушивали в самопропаривающемся слое. При такой технологии жарения в лабораторных условиях достигалось достаточно сравнимое

¹Так как для проведения экспериментов по моделированию линейного процесса [1–6, 8, 9] применялась ячейка с выходом масла только в днище, что вызвало неоправданно повышенное давление в прессуемом материале, авторы применили зер с дополнительно выполненными для выхода масла отверстиями в его обечайке

²С учетом наличия готового полупродукта ядро семян подсолнечника проведение операций по очистке семян, обрушиванию их и разделению рушанки на стенде ВНИИЖиров для изучения линейного процесса прессования подсолнечной мезги и отжима масла не требовалось, поэтому выполнялись только операции измельчения ядра и жарения мятки

с промышленной технологией жарения изменение свойств обрабатываемого маслосодержащего материала. Жарение мятки проводили при двух различных режимах: эксперимент I (Θ_I) – температура 80–85°C, влажность 6,2–7,1%; эксперимент II (Θ_{II}) – температура 100–105°C, влажность 4,5–5,3%.

Методика проведения эксперимента на установке для изучения процесса прессования и отжима масла осуществлялась следующим образом. Подготовленная в соответствии с приведенным описанием мезга из стакана переносилась в предварительно нагретый до заданной температуры зеер ячейки для прессования, в который вставляли плунжер, нагретый до такой же температуры; ячейку в сборе на поддоне для масла помещали на площадку гидравлического пресса. Под выход масла из поддона помещали стакан для масла на весах, подключали индикатор для измерения высоты материала. Рычагом пресса начинали подачу гидравлической жидкости, включая при этом секундомер для отсчета времени и видеокамеру, обеспечивая заданную скорость перемещения плунжера 1,2 мм/с. Фиксировали момент появления первых капель масла из прессуемой мезги. Отжимаемое масло стекало в поддон, далее в стакан для масла на весах. В ходе исследования регистрировали давление гидравлической жидкости в системе. По окончании эксперимента выполняли дублирующий – повторно.

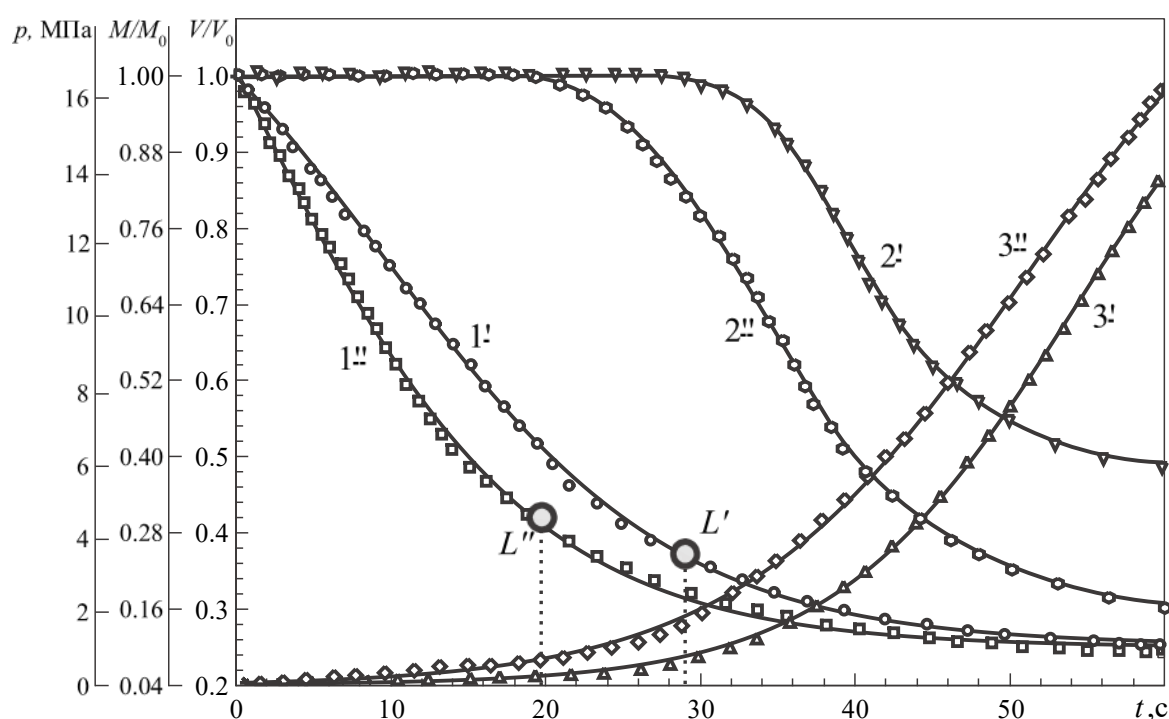


Рисунок – Кинетические кривые прессования и отжима масла из мезги семян подсолнечника, полученные экспериментально (символы) и теоретически (сплошные линии): 1 – относительное изменение объема прессуемого материала; 2 – отношение массы масла, оставшегося в прессуемом материале, к первоначальной; 3 – удельное давление, развиваемое в прессуемом материале

Figure. Kinetic curves of pressing and squeezing oil from sunflower seed pulp, obtained experimentally (symbols) and theoretically (solid lines): 1 – relative change in the volume of the pressed material; 2 – ratio of the mass of oil remaining in the pressed material to the initial one; 3 – specific pressure developed in the pressed material

Обработку полученных показателей осуществляли сразу после завершения испытания, учитывая данные по расшифровке видеозаписи. За результат принимали среднее арифметическое значение каждого показателя (основного и дублирующего). При необходимости эксперимент проводили повторно. Масличность полученного жмыха составила 20–22% для Θ_I и 16–18% для Θ_{II} , что соответствует средней масличности жмыха, вырабатываемого на форпрессах при переработке семян подсолнечника и описанных в масложировой промышленности режимах. Критерием воспроизводимости служило расхождение между результатами основного и дублирующего опытов, которое не превышало 5%. В связи с высокой сходимостью результатов, на графиках представлены средние арифметические значения.

Все анализы по определению технологических показателей выполняли в соответствии с методами, изложенными в руководствах ВНИИЖиров и ГОСТах РФ. В каждом из экспериментов определяли следующие параметры процесса:

V/V_0 – относительное изменение объема прессуемого материала, где V – объем, занимаемый прессуемым материалом в момент времени, t ;

V_0 – объем, занимаемый мезгой в зее без приложения давления;

M/M_0 – отношение массы масла, оставшегося в прессуемом материале, к первоначальной;

p – удельное давление, развиваемое в прессуемом материале, МПа.

Условия и предположения, принятые при эксперименте по проведению линейного процесса прессования мезги и отжима масла:

- ✓ в зее отсутствует продольное перемешивание материала;
- ✓ определяемое давление складывается из давления, расходуемого на формоизменение материала и движение масла через сжимаемый материал и отверстия в зее;
- ✓ полученные кинетические зависимости определяются преимущественно свойствами материала, подвергающегося прессованию.

Экспериментальные кинетические зависимости прессования мезги из семян подсолнечника и отжима из нее масла представлены на рисунке. Набор данных (символы) с одним штрихом – эксперимент I; набор данных с двумя штрихами – эксперимент II. Точками L' и L'' на кривых относительного изменения объема прессуемого материала отмечен момент появления первых капель отжимаемого масла.

Результаты и их обсуждение

Обоснование применения обобщенного логистического уравнения. Исследование и описание кинетики линейного процесса прессования и отжима масла является сложной задачей, так как априори предполагает изучение механизма фильтрации масла через непрерывно уплотняющийся капиллярно-пористый слой маслосодержащего материала. Традиционные подходы к моделированию, основанные на численном решении уравнений гидродинамики для канала шнека, требуют значительных вычислительных ресурсов и сложных реологических конститутивных соотношений, что затрудняет их использование для оперативной инженерной оптимизации [13, 14]. Существуют классические модели на основе уравнения логистического роста (уравнение П.Ф. Ферхюльста), широко применяемые в биологии, химии и экономике для описания процессов с самоускорением и насыщением [15, 16].

В статье [17] автор, используя классическую математическую модель внутривидовой конкуренции биологических популяций Ферхюльста (Par P.-F. Verhulst), предложил обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка для описания относительной скорости изменения урожая растения подсолнечник. На основе решения этого уравнения получена строгая аналитическая формула для определения урожая этого растения, учитывающая ряд факторов, влияющих на его рост.

Логистическое уравнение используется в линейной оптимизационной модели для цепочки поставок подсолнечного масла от фермера до конечного потребителя [18]. Цель модели состоит в минимизации общих транспортных расходов с учетом пропускной способности, удовлетворения спроса и управления.

Сравнение различных способов описания индекса листовой поверхности, являющегося важным параметром в экофизиологии сельхозкультур применительно к кормовой кукурузе [19], показало превосходство логистического уравнения над альтернативной гауссовской моделью.

Кинетика сушки в естественных условиях маслосодержащих мякоти, семян и ядра восьми коммерчески важных видов плодов тропических растений Гайаны и данные последующего извлечения масла приведены в [20]. Сушку всех образцов (с начальной влажностью 24...71%) до влажности около 5% проводили непосредственно на солнце и под навесом. Для моделирования кинетики сушки и оценки параметров, влияющих на процесс, использовали несколько моделей, из которых наиболее подходящей признана модель стандартной логистической функции (SLF) с самым высоким коэффициентом корреляции (более 0,98) и наименьшим значением X^2 . Из высушенных образцов растительное масло извлекали с применением метода гидравлического отжима в ячейке с плунжером. Установлены зависимости качественных показателей полученного растительного масла от условий сушки образцов, предшествующей его извлечению.

Выполненный анализ показывает, что применение обобщенного логистического уравнения для описания кинетики процесса прессования и отжима растительного масла с учетом двух конкурирующих факторов – самоускорения, связанного с упрощением процесса фильтрации по мере выделения масла,

и лимитирующего, обусловленного снижением количества масла, доступного для отжима из прессуемого материала, естественным образом приводит к уравнению Ферхюльста с двумя стационарными точками. Сопоставление с более сложными гидродинамическими моделями раскрывает дополнительный потенциал логистического подхода как связующего звена между микроуровневым описанием течения в канале пресса и интегральными выходными характеристиками процесса.

Вывод обобщенного логистического уравнения. Для вывода уравнения, связывающего скорость отжима и количество масла, рассмотрим условно процесс отжима как самоускоряющийся или процесс с насыщением, управляемый внутренним сопротивлением. Для этого следует учесть данные ранее рассмотренного раздела. Обозначив через t время, отсчитываемое с момента начала процесса прессования, через t_0 – время появления первых капель масла. Момент времени t_0 не совпадает со временем t и зависит как от свойств загруженного маслосодержащего материала, так и от давления p и температуры материала в зере. Пусть $M(t)$ – количество масла, оставшегося в прессуемом материале в момент времени t . Обозначим через $M_0 = M(t_0)$ – начальное количество масла в загруженной мезге, а $M(\infty)$ – неизвлекаемый остаток масла, для которого будем использовать обозначение $a = M(\infty)$. Полностью отжать масло невозможно вследствие известных причин фундаментального характера (местонахождение масла в прессуемом материале, включая недоступное) и воздействия различных факторов. Величина этого остатка, как и скорость его достижения, зависит от ряда факторов, что отражается в значениях и других параметрах модели.

При дальнейших построениях нами учитывался следующий механизм отжима масла из маслосодержащего материала при прессовании. Известно, что запасные липиды в клетках ядра семян локализованы в сферосомах – центрах синтеза и накопления масла. При сильном механическом воздействии (измельчении) и влаготепловой обработке оболочки сферосом разрушаются и масло заполняет поры капиллярно-пористого масляного материала [21]. Отжим масла из такого материала происходит следующим образом. Скорость отжима масла в начальный момент времени невелика. При дальнейшем повышении давления выход масла возрастает за счет отжима масла преимущественно из самых крупных пор (супермакропор и макропор) материала; далее, по мере повышения давления, стенки крупных пор и капилляров сближаются, разрушаются – отжимается масло из средних и мелких макропор, которые сжимаются и уменьшаются в размерах. При этом образуются вторичные структуры прессуемого материала и, наконец, в зоне его максимального сжатия (перед выходом из пресса) происходит более глубокое разрушение клеточной структуры частиц ядра и сферосом с маслом. После выхода жмыха из пресса окончательно формируется капиллярно-пористая структура материала [21]. Часть масла остается в жмыхе, так как оно не может быть полностью извлечено [22].

Следует учесть, что скорость процесса отжима зависит от двух конкурирующих факторов, каждый из которых линейно зависит от содержания масла $M(t)$. Первый фактор – самоускоряющийся и влияющий на отжим в начальном этапе. Чем больше масла еще осталось, тем быстрее идет процесс отжима. То есть сопротивление растет по мере уменьшения $M(t)$. Предположим, что этот фактор пропорционален разности между текущим остатком $M(t)$ и неким критическим порогом a , ниже которого масло удерживается столь сильно, что его извлечение становится крайне затруднено. Фактор имеет вид $(M(t) - a)$, где a есть не извлекаемая часть масла, которая считается постоянной. Второй фактор, затрудняющий отжим (лимитирующий), определяет скорость отжима в заключительной фазе. Чем меньше осталось доступного для отжима масла, тем труднее его извлечь, так как остается только трудно удаляемое. Этот фактор будем считать пропорциональным $b - M$, где b – максимальное содержание масла, которое теоретически могло бы быть удалено при отсутствии лимитирующих факторов. Для наличия отжима в любой момент времени должно выполняться неравенство $b > M$.

В соответствии с описанной моделью скорость отжима будем считать пропорциональной произведению обоих факторов. В результате приходим к обобщенному логистическому уравнению (Ферхюльста) для $M(t)$

$$\frac{dM}{dt} = -k(M - a)(b - M), \quad (1)$$

где параметр k – комплексный коэффициент, объединяющий влияние величин, определяющих скорость процесса отжима: эффективную вязкость масла, проницаемость прессуемого материала и пр. Чем выше k , тем круче логистическая кривая и тем быстрее достигается насыщение.

Решение дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям $M(t_0) = M_0$, легко находится методом разделения переменных и представляет собой обобщенную логистическую функцию

$$M(t) = \frac{a(b - M_0)e^{k(b-a)(t-t_0)} + b(M_0 - a)}{(b - M_0)e^{k(b-a)(t-t_0)} + (M_0 - a)} = a + \frac{(b - a)(M_0 - a)}{(b - M_0)e^{k(b-a)(t-t_0)} + (M_0 - a)}, \quad (2)$$

где t_0 – момент появления масла.

Переходя в полученной формуле к пределу $t \rightarrow \infty$, получаем равенство $a = M(\infty)$, т. е. действительно параметр a в уравнении (1) имеет смысл неизвлекаемой части масла. Отметим, что параметр a – это теоретический предел удержания масла материалом, достижимый только в идеализированных условиях (бесконечное время, идеальное распределение давления). Фактический остаток $M(\infty)$ в реальном процессе всегда несколько больше этого предела ($M(\infty) > a$) из-за неидеальности процесса.

Таким образом, логистическое уравнение является компактной математической моделью, отражающей два основных конкурирующих механизма процесса: самоускорение за счет улучшения фильтрационных свойств среды и торможение за счет истощения запасов доступного масла.

Обработка данных, полученных экспериментально. Для верификации уравнений (1) и (2) проведено их сравнение с экспериментальными данными, полученными на установке для изучения линейного процесса прессования и отжима масла. С этой целью полученные в эксперименте зависимости аппроксимировались следующей обобщенной логистической функцией

$$F(A, B, C, t_0) = C + \frac{A}{1 + e^{B(t-t_0)}}, \quad (3)$$

где C – неизвлекаемый остаток масла в жмыхе (доля масла, оставшаяся в материале после завершения отжима, которая не может быть удалена даже при длительном прессовании);

A – полное количество масла, доступное для отжима (разность между начальным содержанием масла в материале и его неизвлекаемым остатком);

B – интенсивность (темп) процесса отжима (характеризует, насколько быстро происходит переход от начального состояния к предельному; чем больше $|B|$, тем быстрее извлекается доступная часть масла).

При обработке графиков кривых прессования и отжима масла получены значения параметров, входящих в (3). Аппроксимация выполнялась методом наименьших квадратов с использованием алгоритма Левенберга – Марквардта. Для каждой кривой в двух температурных диапазонах получили оптимальные значения параметров логистической функции (3) – A, B, C, t_0 , представленные в таблице. Качество аппроксимации оценивалось с помощью коэффициента детерминации R^2 . Во всех случаях значение R^2 превышало 0,983, что свидетельствует о высоком уровне соответствия модели экспериментальным данным. Для оценки устойчивости параметров модели проанализировали их статистический разброс. Стандартные ошибки (Standard Errors) параметров, оцененные алгоритмом Левенберга – Марквардта, составляют менее 5% от их абсолютных значений, что в сочетании с высоким коэффициентом детерминации ($R^2 > 0,983$) подтверждает статистическую значимость и устойчивость полученной обобщенной логистической модели.

Таблица. Параметры логистической аппроксимации экспериментальных данных
Table. Parameters of logistic approximation of experimental data

Параметр	A	B	C	t_0
$V/V_0, \Theta_I$	-1,5584	0,1065	1,8085	-0,5080
$V/V_0, \Theta_{II}$	-1,0229	0,1078	1,2745	9,3464
$M/M_0, \Theta_I$	-0,8355	0,0143	0,9806	31,8297
$M/M_0, \Theta_{II}$	-0,7813	0,0764	1,0045	34,3873
p, Θ_I	-1,0767	-0,1076	1,2760	51,0392
p, Θ_{II}	-0,9825	-0,1288	1,1837	54,1090

При интерпретации параметров обобщенного логистического уравнения (3) следует учитывать, что их знаки зависят от выбранной параметризации и направления процесса. Для монотонно убывающих функций (относительный объем V/V_0 и масличность M/M_0) параметр A , характеризующий амплитуду изменения, принимает отрицательные значения, что математически корректно отражает кинетику снижения показателя. Параметр B определяет темп процесса; его знак не имеет самостоятельного физического смысла и может различаться в зависимости от выбранной параметризации уравнения в программе аппроксимации. В представленной таблице для V/V_0 использована параметризация с отрицательными A и положительными B , а для M/M_0 — также с отрицательными A , но с меньшими положительными значениями B , что отражает различную кинетику процессов сжатия и отжима масла.

На рисунке приведено сравнение экспериментальных точек и построенных по ним логистических кривых для всех трех измеряемых величин в двух температурных режимах. Представленные графики показывают хорошую корреляцию экспериментальных значений с теоретическими. Отметим, что применимость логистического уравнения к относительному изменению объема прессуемого материала выводится из точно таких же соображений, что и для маслосодержания.

По изменению давления в прессуемом материале ситуация несколько сложнее. Уравнение (1) обладает следующим свойством: если $y(t)$ есть решение данного уравнения, то $1/y(t)$ так же есть решение аналогичного уравнения, отличающегося от (1) только значениями параметров k , a , b . Отсюда вытекает справедливость обобщенного логистического уравнения для давления, если оно обратно пропорционально объему. Если же зависимость более сложная, то точность аппроксимации зависимостью (1) может уменьшиться, например, при больших давлениях, превышающих 30 МПа. Хорошая сходимость экспериментальных кривых с теоретически полученными зависимостями указывает на постоянство произведения pV для заданных значений давления.

Заключение

Проверка разработанной логистической модели для описания процесса гидравлического отжима масла из подготовленных семян подсолнечника в ячейке для прессования показала возможность ее применимости. Это позволит использовать логистические зависимости для анализа и управления процессом прессования маслосодержащего материала и отжима масла; следовательно, применить и для решения следующих задач в производстве растительного масла прессованием.

1. *Определение оптимального времени процесса прессования и отжима масла.* Асимптотический характер кривой показывает, что после времени $t \approx t_0 + 3/(k(b - a))$ прирост выхода масла становится незначительным. Учет этого явления позволяет экономически обоснованно ограничить время отжима масла, снижая при этом непроизводительные затраты энергии и время нахождения маслосодержащего материала в прессе, что особенно важно для сохранения качества масла и жмыха.

2. *Оценка эффективности подготовки маслосодержащего материала.* Параметр a зависит от степени разрушения структуры маслосодержащего материала при измельчении. Сравнивая величину a для выбранного режима измельчения, можно количественно оценить, насколько тот или иной режим потенциально повышает выход масла.

3. *Диагностика работы пресса.* Параметр k (скорость роста) чувствителен к изменению вязкости масла и сопротивлению фильтрации. При переработке маслосодержащего материала с повышенной влажностью или сырья значение k будет снижаться. Мониторинг этого параметра в реальном времени может служить индикатором отклонения качества сырья от нормы и возникновения проблем в работе маслопресса.

4. *Связь с гидродинамическими моделями.* Логистическая кривая выхода масла во времени является интегральным отражением процессов, описываемых гидродинамическими моделями распределения давления в канале шнека, что позволяет использовать ее не только как эмпирическую аппроксимацию, но и как универсальный инструмент с понятной физической интерпретацией основных параметров.

Следующим направлением развития разработанной логистической модели станет установление возможности ее применения не только для рассмотренного процесса прессования маслосодержащего материала и отжима масла, но и для более сложного процесса, происходящего в шнековом маслопрессе.

Литература

1. Durruty I., Aguirrezábal L.A., Echarte M.M. Kinetic modeling of sunflower grain filling and fatty acid biosynthesis. *Frontiers in Plant Science*. 2016, V. 7, article 586. DOI: 10.3389/fpls.2016.00586
2. Мельник Г.Е., Старков И.А., Лисицын Д.А., Старков К.А. Основные положения совмещенного процесса разрушения масличного материала и отжима масла в маслопрессе // Вестник ВНИИЖ. 2024. № 1–2. С. 32–37. DOI: 10.25812/VNIIG.2024.65.18.005
3. Shirato M., Murase T., Tsumi K., Aragaki T., Noguchi T. Industrial expression equation for semi-solid materials of solid-liquid mixture under constant pressure. *Journal of Chemical Engineering of Japan*. 1979, V. 12, no. 1, pp. 51–55
4. Kabutey A., Herak D., Ambarita H., Sigalingging R. Modeling of linear and non-linear compression processes of sunflower bulk oilseeds. *Energies*. 2019, V. 12, no. 15, article 2999. DOI: 10.3390/en12152999
5. Willems P., Kuipers N.J.M., De Haan A.B. Hydraulic pressing of oilseeds: Experimental determination and modeling of yield and pressing rates. *Journal of Food Engineering*. 2008, V. 89, no. 1, pp. 8–16
6. Анферов С.Д., Скульский О.И., Славнов Е.В. Математическое моделирование процесса прямого отжима масличной культуры // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2014. № 1. С. 31–56. DOI: 10.15593/2224-9893/2014.1.02
7. Munson-Mcgee S.H. D-optimal experimental designs for uniaxial expression. *Journal of Food Process Engineering*. 2014, V. 37, no. 3, pp. 248–256. DOI: 10.1111/jfpe.12080
8. Tamas K., Foldesi B., Radics J.P., Jori I.J., Fenyvesi L. A simulation model for determining the mechanical properties of rapeseed using the discrete element method. *Periodica Polytechnica Civil Engineering*. 2015, V. 59, no. 4, pp. 575–582. DOI: 10.3311/PPci.8173
9. Savoie R., Carre P., Chardot T., Lanoiselle J.-L., Miquel M., Nesi N., Quinsac A., Vorobiev E. Micro-pressing of rapeseed (*Brassica napus* L.) and *Arabidopsis thaliana* seeds for evaluation of the oil extractability. *OCL*. 2010, V. 17, no. 2, pp. 115–119. DOI: 10.1051/ocl.2010.0300
10. Venter M.J., Kuipers N.J.M., De Haan A.B. Modelling and experimental evaluation of high-pressure expression of cocoa nibs. *Journal of Food Engineering*. 2007, V. 80, no. 4, pp. 1157–1170. DOI: 10.1016/j.jfoodeng.2006.09.005
11. Gupta R.K., Das S.K. Fracture resistance of sunflower seed and kernel to compressive loading. *Journal of Food Engineering*. 2000, V. 46, no. 1, pp. 1–8. DOI: 10.1016/S0260-8774(00)00061-3.
12. Kabutey A., Herák D., Mizera Č. Determination of maximum oil yield, quality indicators and absorbance spectra of hulled sunflower seeds oil extraction under axial loading. *Foods*. 2022, V. 11, no. 18, article 2866. DOI: 10.3390/foods11182866.
13. Lazouk M.A., Savoie R., Kaddour A., Castello J.L., Van Hecke E., Thomasset B. Oilseeds sorption isotherms, mechanical properties and pressing: Global view of water impact. *Journal of Food Engineering*. 2015, V. 153, pp. 73–80. DOI: 10.1016/j.jfoodeng.2014.12.008
14. Старков И.А., Мельник Г.Е., Старков А.С., Лисицын Д.А. Моделирование течения маслосодержащего материала в каналах прессующего тракта маслопресса. Часть 1. Распределение давления // Научный журнал НИУ ИТМО. Серия «Процессы и аппараты пищевых производств». 2025. № 3. С. 27–36. DOI: 10.17586/2310-1164-2025-18-3-27-36
15. Мельник Г.Е., Старков К.А. Моделирование течения маслосодержащего материала в каналах прессующего тракта маслопресса. Часть 2. Распределение скоростей // Научный журнал НИУ ИТМО. Серия «Процессы и аппараты пищевых производств». 2025. № 3. С. 37–44. DOI: 10.17586/2310-1164-2025-18-3-37-44
16. Tsoularis A., Wallace J. Analysis of logistic growth models. *Mathematical Biosciences*. 2002, V. 179, no. 1, pp. 21–55. DOI: 10.1016/S0025-5564(02)00096-2
17. Григулецкий В.Г. Обоснование эмпирической формулы Пустовойта–Дьякова, определяющей оптимальный фенотип подсолнечника по урожайности // Масличные культуры. 2021. № 1. С. 3–9. DOI: 10.25230/2412-608X-2021-1-185-3-9
18. Kousar S., Kausar N., Kanwal S., Ozbilge E. Linear programming model for sunflower oil supply chain network. *JIRMCS*. 2024, V. 3, no. 1, pp. 1–21. DOI: 10.62270/jirmcs.v3i1.24
19. Hajirad I., Ahmadaali K., Liaghat A., Pourgholam-Amiji M., Collins B. Logistic modelling of silage maize LAI dynamics under different irrigation regimes: A strategy for optimizing crop yield. *Irrigation and Drainage*. 2025, V. 74, no. 5, pp. 2267–2278. DOI: 10.1002/ird.70020.
20. Deonaraine S., Soodoo N., Laziz Bouzidi L., Narine S.S. Oil extraction and natural drying kinetics of the pulp and seeds of commercially important oleaginous fruit from the rainforests of Guyana. *Processes*. 2023, V. 11, article 3292. DOI: 10.3390/pr11123292
21. Лисицын А.Н., Григорьева В.Н. Влияние химико-технологических воздействий на ядро масличных семян и на качество извлекаемого масла. СПб.: Изд-во ВНИИЖиров, 2024. 157 с.

22. Старков А.С., Старков К.А., Мельник Г.Е., Луицын Д.А. Не извлекаемая часть растительного масла при прессовании и возможности ее снижения // Вестник ВНИИЖ. 2021. № 1–2. С. 10–13. DOI: 10.25812/VNIIG.2021.38/87003.

References

1. Durruty I., Aguirrezábal L.A., Echarte M.M. Kinetic modeling of sunflower grain filling and fatty acid biosynthesis. *Frontiers in Plant Science*. 2016, V. 7, article 586. DOI: 10.3389/fpls.2016.00586
2. Melnik G.E., Starkov I.A., Lisitsyn D.A., Starkov K.A. Basic principles of the combined process of destruction of oil-containing material and oil extraction in an oil press. *Vestnik VNIIZH*. 2024, no. 1–2, pp. 32–37. DOI: 10.25812/VNIIG.2024.65.18.005. (In Russian)
3. Shirato M., Murase T., Tsumi K., Aragaki T., Noguchi T. Industrial expression equation for semi-solid materials of solid-liquid mixture under constant pressure. *Journal of Chemical Engineering of Japan*. 1979, V. 12, no. 1, pp. 51–55
4. Kabutey A., Herak D., Ambarita H., Sigalingging R. Modeling of linear and non-linear compression processes of sunflower bulk oilseeds. *Energies*. 2019, V. 12, no. 15, article 2999. DOI: 10.3390/en12152999
5. Willems P., Kuipers N.J.M., De Haan A.B. Hydraulic pressing of oilseeds: Experimental determination and modeling of yield and pressing rates. *Journal of Food Engineering*. 2008, V. 89, no. 1, pp. 8–16
6. Anferov S.D., Skulskiy O.I., Slavnov E.V. Mathematical modelling of vegetable oil plunger extraction. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2014, no. 1, pp. 31–56. DOI: 10.15593/2224-9893/2014.1.02. (In Russian)
7. Munson-Mcgee S.H. D-optimal experimental designs for uniaxial expression. *Journal of Food Process Engineering*. 2014, V. 37, no. 3, pp. 248–256. DOI: 10.1111/jfpe.12080
8. Tamas K., Foldesi B., Radics J.P., Jori I.J., Fenyvesi L. A simulation model for determining the mechanical properties of rapeseed using the discrete element method. *Periodica Polytechnica Civil Engineering*. 2015, V. 59, no. 4, pp. 575–582. DOI: 10.3311/PPci.8173
9. Savoie R., Carre P., Chardot T., Lanoiselle J.-L., Miquel M., Nesi N., Quinsac A., Vorobiev E. Micro-pressing of rapeseed (*Brassica napus* L.) and *Arabidopsis thaliana* seeds for evaluation of the oil extractability. *OCL*. 2010, V. 17, no. 2, pp. 115–119. DOI: 10.1051/ocl.2010.0300
10. Venter M.J., Kuipers N.J.M., De Haan A.B. Modelling and experimental evaluation of high-pressure expression of cocoa nibs. *Journal of Food Engineering*. 2007, V. 80, no. 4, pp. 1157–1170. DOI: 10.1016/j.jfoodeng.2006.09.005
11. Gupta R.K., Das S.K. Fracture resistance of sunflower seed and kernel to compressive loading. *Journal of Food Engineering*. 2000, V. 46, no. 1, pp. 1–8. DOI: 10.1016/S0260-8774(00)00061-3
12. Kabutey A., Herák D., Mizera Č. Determination of maximum oil yield, quality indicators and absorbance spectra of hulled sunflower seeds oil extraction under axial loading. *Foods*. 2022, V. 11, no. 18, article 2866. DOI: 10.3390/foods11182866
13. Lazouk M.A., Savoie R., Kaddour A., Castello J.L., Van Hecke E., Thomasset B. Oilseeds sorption isotherms, mechanical properties and pressing: Global view of water impact. *Journal of Food Engineering*. 2015, V. 153, pp. 73–80. DOI: 10.1016/j.jfoodeng.2014.12.008
14. Starkov I.A., Melnik G.E., Starkov A.S., Lisitsyn D.A. Modeling of oil-containing material flow in the channels of the pressing path of an oil press. Part 1. Pressure distribution. *Processes and Food Production Equipment*. 2025, no. 3, pp. 27–36. DOI: 10.17586/2310-1164-2025-18-3-27-36. (In Russian)
15. Melnik G.E., Starkov K.A. Modeling of oil-containing material flow in the channels of the oil pressing path of an oil press. Part 2. Velocity distribution. *Processes and Food Production Equipment*. 2025, no. 3, pp. 37–44. DOI: 10.17586/2310-1164-2025-18-3-37-44. (In Russian)
16. Tsoularis A., Wallace J. Analysis of logistic growth models. *Mathematical Biosciences*. 2002, V. 179, no. 1, pp. 21–55. DOI: 10.1016/S0025-5564(02)00096-2
17. Griguletskiy V.G. Justification of the empirical formula of Pustovoi–Dyakov determining the optimal sunflower phenotype by yield. *Oil Crops*. 2021, no. 1, pp. 3–9. DOI: 10.25230/2412-608X-2021-1-185-3-9. (In Russian)
18. Kousar S., Kausar N., Kanwal S., Ozbilge E. Linear programming model for sunflower oil supply chain network. *JIRMCS*. 2024, V. 3, no. 1, pp. 1–21. DOI: 10.62270/jirmcs.v3i1.24
19. Hajirad I., Ahmadaali K., Liaghat A., Pourgholam-Amiji M., Collins B. Logistic modelling of silage maize LAI dynamics under different irrigation regimes: A strategy for optimizing crop yield. *Irrigation and Drainage*. 2025, V. 74, no. 5, pp. 2267–2278. DOI: 10.1002/ird.70020
20. Deonarine S., Soodoo N., Laziz Bouzidi L., Narine S.S. Oil extraction and natural drying kinetics of the pulp and seeds of commercially important oleaginous fruit from the rainforests of Guyana. *Processes*. 2023, V. 11, article 3292. DOI: 10.3390/pr11123292
21. Lisitsyn A.N., Grigorieva V.N. Influence of chemical and technological treatments on oilseed kernel and on the quality of extracted oil. St. Petersburg, VNIIZh Publ., 2024. 157 p. (In Russian)

22. Starkov A.S., Starkov K.A., Melnik G.E., Lisitsyn D.A. Non-extractable part of vegetable oil during pressing and possibilities for its reduction. *Vestnik VNIIZH*. 2021, no. 1–2, pp. 10–13. DOI: 10.25812/VNIIG.2021.38/87003. (In Russian)

Информация об авторах

Александр Сергеевич Старков – канд. физ.-мат. наук, доцент факультета систем управления и робототехники

Геннадий Ефимович Мельник – канд. техн. наук, ведущий научный сотрудник

Иван Александрович Старков – канд. физ.-мат. наук, ведущий специалист

Андрей Николаевич Мануйлов – канд. техн. наук, ведущий специалист

Information about the authors

Alexander S. Starkov, Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Control Systems and Robotics

Gennady E. Melnik, Ph.D. (Eng.), Leading Researcher

Ivan A. Starkov, Ph.D. (Phys.-Math.), Leading specialist

Andrey N. Manuylov, Ph.D. (Eng.), Leading specialist

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests

Статья поступила в редакцию 18.06.2026

Одобрена после рецензирования 13.08.2026

Принята к публикации 27.08.2026

The article was submitted 18.06.2026

Approved after reviewing 13.08.2026

Accepted for publication 27.08.2026