

Научная статья

УДК 519.68:532.7:541.8:541.182.41

DOI: 10.17586/2310-1164-2022-15-1-47-60

## Математическое моделирование процесса формирования реального острия лезвийной кромки ножа шнекового измельчителя твердообразных материалов

В.В. Пеленко<sup>1\*</sup>, В.В. Нечитайлов<sup>1</sup>, В.П. Иваненко<sup>1</sup>, А.П. Верболюз<sup>2</sup>, Г.В. Баринов<sup>2</sup><sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна<sup>2</sup>Университет ИТМО

Россия, Санкт-Петербург, \*pelenko1@rambler.ru

**Аннотация.** Анализировали закономерности формирования жала режущей кромки лезвия ножа шнековых измельчителей. Известно, что на фаске лезвия ножа шнекового измельчителя в результате заточки вырабатывается лезвийная кромка, на краевой части которой формируется заусенец теоретически идеальной, абсолютной остроты с бесконечно малым, практически нулевым радиусом кривизны. Этот заусенец недостаточной прочности из-за малого размера поперечного сечения при взаимодействии с измельчаемым материалом отламывается, образуя жало, радиус кривизны которого конечен и является действительной количественной характеристикой остроты лезвия. Очевидно, что для снижения энергоемкости процесса измельчения и повышения качества резания следует доводить остроту режущей кромки до максимально возможной, то есть реальный радиус кривизны жала до минимально достижимого значения. При этом совершенно ясно, что заточка лезвия до очень малых значений радиуса кривизны жала ограничена упомянутой прочностью заусенца фаски лезвийной кромки ножа вблизи ее вершины. На практике известны режущие инструменты с высокой остротой, определяемой малым радиусом кривизны жала, порядка нескольких десятков ангстрем. Однако, использование лезвия с такой предельно высокой остротой при измельчении твердообразных материалов приводит к неминуемому разрушению заусенца, формирующего жало, и его отламыванию ввиду лимитированной прочности, определяемой размерами поперечного сечения. Задача определения предельно достижимого уровня остроты режущей кромки ножа экспериментальными методами рассматривалась и решалась в ряде исследований. Известно и теоретическое решение задачи. Однако существующие работы имеют ограниченную сферу применения. В настоящем исследовании рассматривается математическое моделирование процесса деформации и разрушения заусенца, сформированного на лезвийной кромке ножа при заточке. Задачами работы является разработка уравнения, устанавливающего зависимость остроты режущей кромки от геометрических и прочностных характеристик лезвия, а также действующих на лезвийную кромку силовых факторов и прочностных характеристик измельчаемого материала. При этом аналитически в общем виде и количественно определяется предельно достижимая острота лезвия, исходя из условия прочности заусенца, находящегося под действием на него боковых сил давления, а также сжимающего усилия резания со стороны измельчаемого материала.

**Ключевые слова:** математическое моделирование; физическая модель; теория упругости; оптимизация; режущая кромка; острота лезвия ножа; угол заточки; силовое нагружение; разрушение; заусенец; жало

Original article

## Mathematical modeling the process of forming a real tip of the blade edge for the knife of a screw grinder for solid materials

Valery V. Pelenko<sup>1\*</sup>, Vasily V. Nechitaylov<sup>1</sup>, Vladimir P. Ivanenko<sup>1</sup>, Alexander P. Verbozoz<sup>2</sup>, Grigory V. Barinov<sup>2</sup><sup>1</sup>Saint Petersburg State University of Industrial Technologies and Design<sup>2</sup>ITMO University

St. Petersburg, Russia, \*pelenko1@rambler.ru

**Abstract.** The article is devoted to a detailed analysis of the tip formation regularities for the cutting edge of the auger grinder knife blade. It is known that, as a result of sharpening, on the chamfer of the auger grinder knife blade a blade edge is produced, on the edge part of which a burr of theoretically ideal, absolute sharpness is formed with an infinitely small practically zero radius of curvature. This burr is of insufficient strength due to the small size of the cross-section, and when interacting with the crushed material it breaks off forming a sting, the radius of curvature of which is finite and is a real quantitative characteristic of the sharpness of the blade. Obviously, in order to reduce the energy consumption of the grinding process and improve the cutting quality, the sharpness of the cutting edge should be brought to the maximum possible, that is, the real radius of curvature of the tip – to the minimum achievable value. At the same time, it is quite clear that sharpening of the blade to very small values of the tip curvature radius is limited by the mentioned strength of the

knife blade edge chamfer burr near its apex. In practice, there exist cutting tools with high sharpness determined by small radius of the tip curvature (of the order of several tens of angstroms). However, using a blade with such an extremely high sharpness when grinding solid materials leads to inevitable destruction of the burr that forms the sting and its breaking off due to the limited strength determined by the size of the cross section. The problem of determining the maximum achievable level of knife cutting edge sharpness by experimental methods has been considered and solved in a number of studies. The theoretical solution to the problem is also known. However, the existing work has a limited scope. This study examines mathematical modeling the deformation and destruction of the burr formed on the blade edge of the knife during sharpening. The tasks of the work are to develop an equation that establishes the dependence of the cutting edge sharpness on the geometric and strength characteristics of the blade, as well as the force factors and strength characteristics of the crushed material acting on the cutting edge. At the same time, both analytically in a general form and quantitatively, the maximum achievable sharpness of the blade is determined based on the condition for the strength of the burr, which is under the action of lateral pressure forces, as well as the compressive cutting force from the side of the material being crushed.

**Keywords:** mathematical modeling; physical model; theory of elasticity; optimization; cutting edge; the sharpness of the knife blade; sharpening angle; force loading; destruction; burr; tip

## Введение

Известно, что существенное влияние на энергоёмкость процесса измельчения, на концентрацию термомеханических напряжений и перераспределение по длине лезвия долей механической и тепловой энергии, поглощаемой измельчаемым материалом, оказывает острота режущей кромки лезвия, а также угол заточки, угол скольжения и толщина лезвия ножа [1]. В аналогичных условиях теплонапряженного состояния находится жало лезвийной кромки при деформации материала, его резании, трении о продукт и измельчительную решетку. Реальная рабочая острота режущей кромки лезвия ножа, характеризующая удвоенным радиусом кривизны огибающей окружности жала ( $SK = 2r$ ), отличается от идеализированной ( $2r = 0$ ) и зависит от нагрузочных и прочностных характеристик материала лезвия, измельчаемого материала, а также от угла заточки, угла скольжения в связи с его кинематической трансформацией и уменьшается по мере увеличения угла скольжения [2]. Угол скольжения, в свою очередь, определяется конфигурацией абриса лезвийной кромки ножа в плоскости резания [3]. Закон, описывающий оптимальную форму лезвийной кромки, а следовательно, и характер изменения угла скольжения, может быть получен лишь исходя из выбора объективного критерия оптимизации, основанного на анализе реальных физических особенностей процессов резания, деформации и перемещения мясного сырья при его механическом взаимодействии с лезвием.

Для измельчителей твердообразных пищевых материалов известен ряд методов конструирования формы режущей кромки лезвия ножа, основанных на априорных подходах. Одним из них является концепция прямолинейной формы абриса лезвийной кромки [4–6]. Другим – выполнение условия постоянства угла скольжения. В этом случае длина радиуса – вектора точки режущей лезвийной кромки в зависимости от угла его поворота изменяется по закону логарифмической спирали [7, 8]. Однако в указанных вариантах отсутствует обоснованный, содержательный физический критерий, объясняющий корректность предлагаемых условий оптимизации, что не позволяет признать получаемую форму лезвия оптимальной. Научно аргументированная процедура оптимизации формы лезвийной кромки ножа шнековых измельчителей должна осуществляться на основе детального анализа особенностей энергообмена при осуществлении физических процессов в зоне резания и взаимодействия лезвия ножа с материалом и измельчительной решеткой, что позволит корректно обосновать состоятельный по содержательности и адекватности конкретный критерий. В работе В.В. Кузьмина [8] введен объективный по своему физическому содержанию критерий оптимизации формы лезвийной кромки, однако он учитывает не все компоненты воздействующих факторов, а лишь работу сил резания, оставляя без внимания работу сил трения и деформации мясного сырья, а также зависимость работы сил резания от остроты жала лезвия.

Глубокое и тщательное рассмотрение особенностей процесса измельчения твердообразного материала лезвием многоперьевого ножа в шнековом измельчителе показывает, что наиболее существенное влияние на концентрацию и перераспределение долей механической энергии, преобразуемой в тепловую и поглощаемую продуктом, а также лезвийной кромкой при резании

материала при его деформации и трении оказывает, в первую очередь, острота жала режущей кромки лезвия [1, 2, 9]. Учитывая более сложный характер воздействия силовых факторов на степень остроты лезвия, чем рассмотренные в известных работах условия, поставлена новая задача корректного обоснования закономерностей процесса формирования реальной режущей лезвийной кромки.

Таким образом, целью работы является математическое описание зависимости параметра остроты лезвия ножа шнекового измельчителя от угла заточки, от действующих нагружающих силовых факторов, и от прочностных характеристик материала лезвия и измельчаемого сырья.

Предложенный подход позволяет не только обобщить и уточнить существующие модели, но и обнаружить экстремальный характер зависимости остроты режущей кромки от угла заточки лезвия, что дает возможность аналитически оптимизировать параметр степени остроты жала.

### Объекты и методы исследования

Объектом исследования является процесс взаимодействия с измельчаемым материалом заусенца, образующегося на лезвийной кромке в результате заточки ножа. В качестве предмета исследования рассматриваются закономерности деформации и разрушения заусенца, позволяющие обосновать предельно достижимую остроту реальной режущей кромки лезвия ножа в условиях сложного напряженно-деформированного состояния.

В качестве метода исследования используется системный анализ характера и специфики нагружения лезвийной кромки, а также математическое моделирование процесса разрушения заусенца при его изломе с использованием аппарата теории упругости и средств графоаналитической аппроксимации результатов.

### Результаты и обсуждение

1. Формирование физической модели и расчетной схемы процесса разрушения заусенца, образованного на кромке лезвия при его заточке

Как известно [3, 4], мерой остроты лезвия ( $SK$ ) принято считать численное значение удвоенного радиуса закругления жала лезвийной кромки ( $SK = 2r$ ) после удаления заусенца под действием разнонаправленных технологических усилий со стороны измельчаемого сырья, фактора удельного усилия резания  $P_{уд}$  и фактора давления сырья  $P$  на лезвие, что наглядно иллюстрируется рисунком 1. В работе [3] определяется, что радиус закругления представляет собой радиус вписанной окружности в профиль поперечного сечения реальной режущей кромки лезвия, как это показано на рисунке 1.

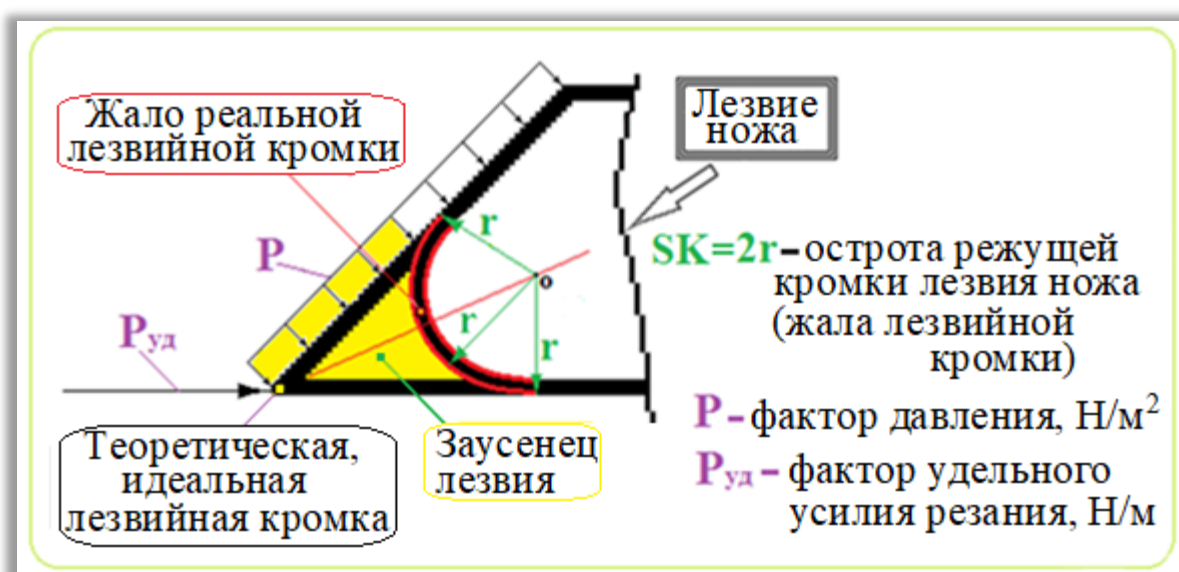


Рисунок 1 – Схема, поясняющая понятие «острота режущей кромки» ножа

Figure 1. Schematic presentation for the sharpness of the knife cutting edge

На рисунке 2 приведена фотография поперечного среза лезвия ножа в плоскости перпендикулярной теоретической лезвийной кромке, при увеличении 10000 крат. На макрофотографии поперечного сечения построена описанная окружность радиуса  $r$ , огибающая жало режущей кромки. По определению, радиус кривизны  $r$  является мерой, то есть количественной характеристикой понятия «острота лезвия ножа».

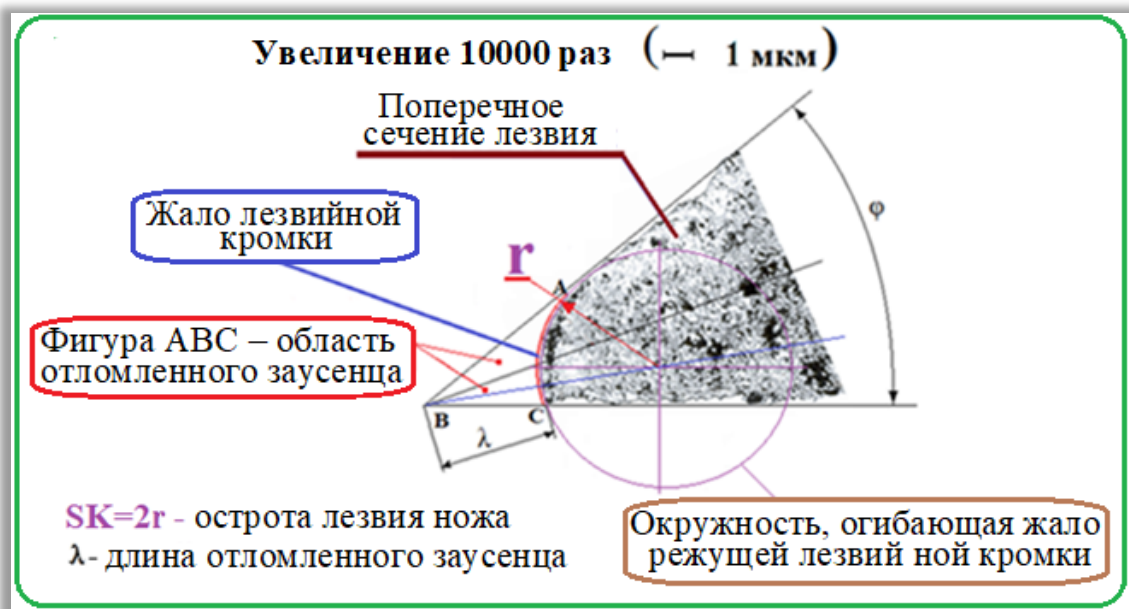


Рисунок 2 – Фотография поперечного сечения ножа ( $r$  – радиус окружности, огибающей жало режущей кромки и определяющий остроту лезвия)

Figure 2. Cross-section of the knife ( $r$  – radius of the circumference enveloping the tip of the cutting edge and determining the sharpness of the blade)

На рисунке 3 схематично изображена физическая картина формирования заусенца и жала лезвийной кромки ножа, а также действующих на лезвие приведенных сил  $Q$  и  $Q_{рез}$ , обусловленных соответственно давлением  $P$  и удельным усилием резания сырья  $P_{уд}$ .

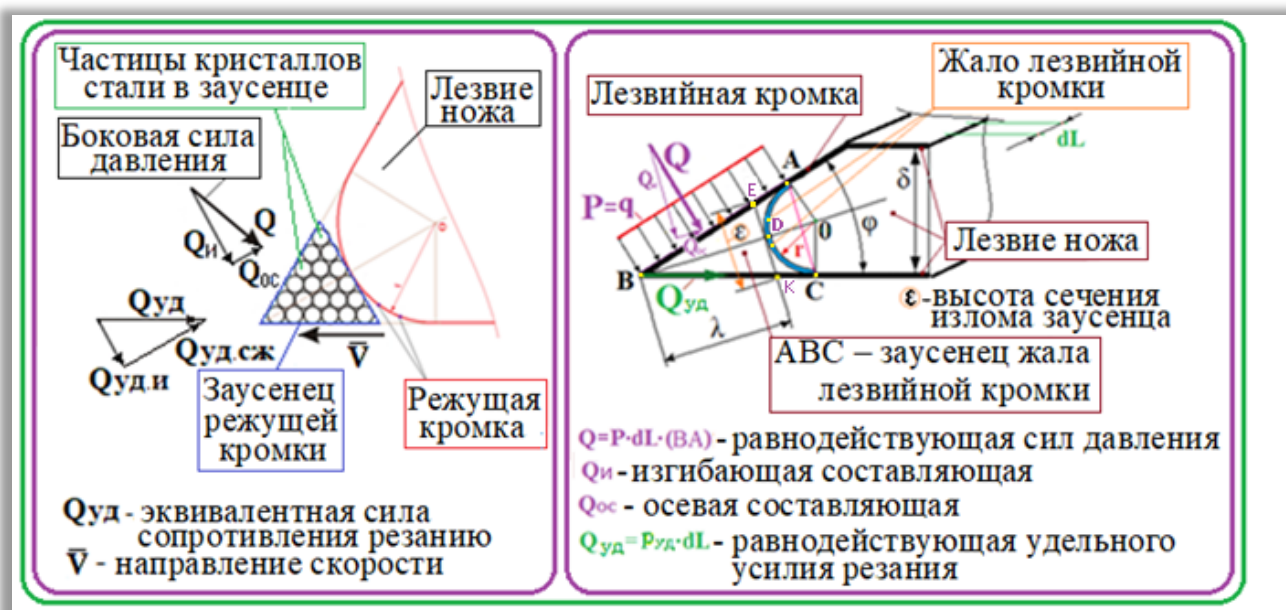


Рисунок 3 – Схема формирования заусенца и жала лезвийной кромки ножа под действием внешних силовых факторов  $Q$  и  $Q_{рез}$

Figure 3. Formation regularities for the burr and the tip of the knife cutting edge under the influence of external forces  $Q$  and  $Q_{рез}$



В работе [2] отмечается, что ориентировочно, для острых лезвий деревообрабатывающего инструмента  $r = 4...6$  мкм для фрез, до  $r = 10$  мкм для пил. Тупыми лезвия считаются при значении радиуса закругления  $r = 30...60$  мкм и более.

Для количественной оценки предельно достижимой степени остроты режущей кромки лезвия необходима разработка корректной математической модели процесса разрушения заусенца, образованного на лезвийной кромке в результате заточки ножа.

Качество разрабатываемой математической модели любого явления, объекта, будь то процесс или аппарат, определяется, в первую очередь, качеством базовой физической модели, максимально отражающей и учитывающей специфику рассматриваемого явления.

Особенности процесса резания мясного сырья в шнековых измельчителях, обусловленные технологией заточки лезвий многоперьевого ножа, связаны с явлением образования и последующего разрушения заусенцев – тонкого клина металла вдоль лезвийной кромки, не способного обеспечить собственную прочность в условиях реальных внешних воздействий из-за недостаточных размеров поперечного сечения и который отламывается от основного металла лезвийной кромки, образуя окончательно реальное жало с радиусом закругления  $r$ , характеризующим реальную остроту лезвия (рисунки 1–3).

В процессе резания измельчаемого материала происходит загиб (первая фаза деформации), а затем отлом (вторая фаза деформации) и удаление заусенца лезвия под действием боковых технологических усилий со стороны мясного сырья, а именно, давления  $P$  в момент прохождения кромки лезвия над отверстиями измельчительной решетки и удельного усилия резания  $P_{уд}$ , действующего на кромку постоянно, как это показано на рисунке 4. Таким образом, теоретическая лезвийная кромка трансформируется в реальную режущую часть, образуя жало лезвийной кромки, являющееся действительным режущим элементом ножа, физически взаимодействующим с измельчаемым сырьем.

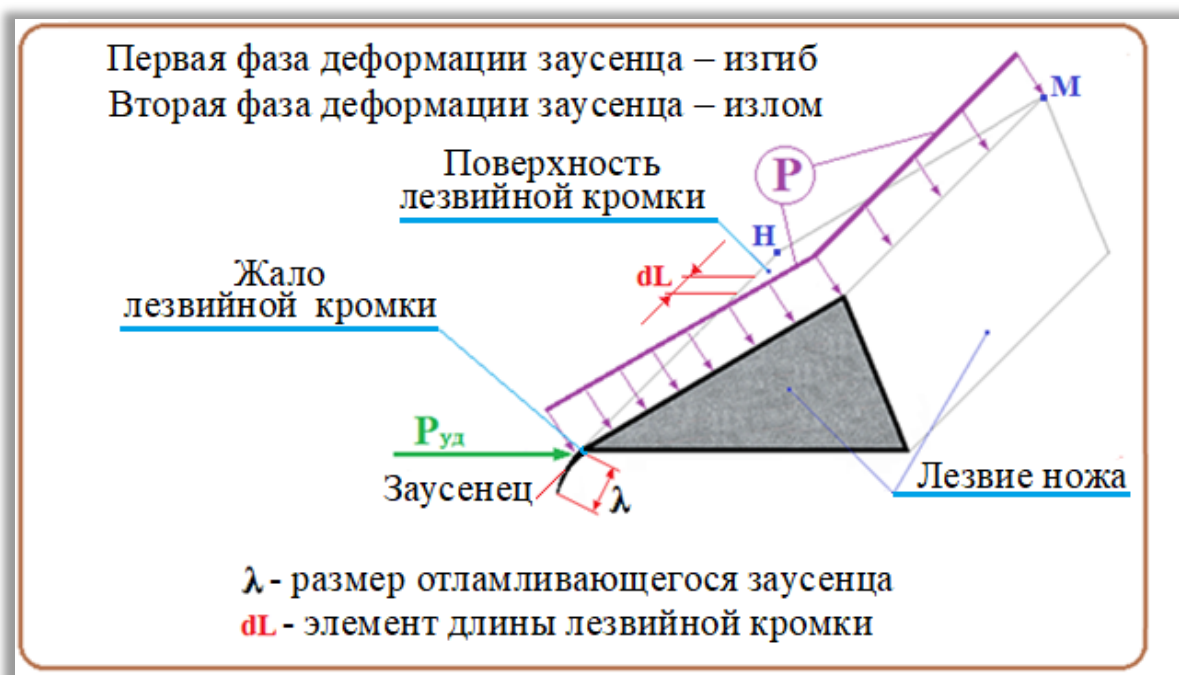


Рисунок 4 – Схема изгиба заусенца и формирования жала лезвийной кромки ножа  
 Figure 4. The burr bending and formation regularities for the tip of the knife cutting edge

Развернутая аксонометрическая схема образования жала лезвия ножа в процессе нагружения технологическими нагрузками  $P$  и  $P_{уд}$  теоретической лезвийной кромки, сформированной в результате заточки, приведена на рисунке 5. Основными силовыми факторами, действующими на заусенец, как уже отмечалось, являются давление мясного сырья  $P = q$  на всю плоскость  $ABFE$  передней поверхности лезвийной кромки, а вторым фактором выступает удельное усилие резания  $P_{уд}$ , действующее на теоретическую лезвийную кромку  $BF$  в направлении  $BC$ . Удельное усилие резания  $P_{уд}$  лежит в плоскости

$BCDF$  и равномерно распределено по длине  $BF$  теоретической лезвийной кромки в направлении нормали к ней.

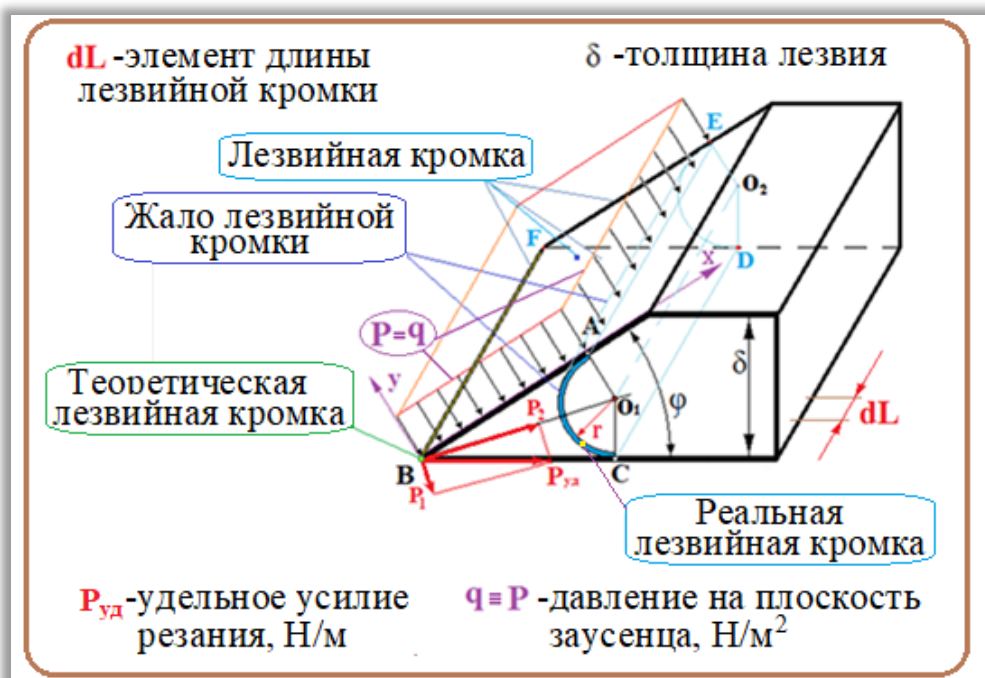


Рисунок 5 – Схема нагружения заусенца лезвийной кромки силовым фактором давления  $P = q$  и силовым фактором удельного усилия резания  $P_{уд}$

Figure 5. Loading the cutting edge of the burr by force pressure factor  $P = q$  and specific cutting force factor  $P_{уд}$

Содержательный анализ силового нагружения, приведенного на рисунке 5, позволяет построить физическую модель и расчетную схему процесса излома заусенца лезвийной кромки под действием эквивалентных сил  $Q$  и  $Q_{рез}$ , действующих на заусенец, что отображено на рисунке 6.

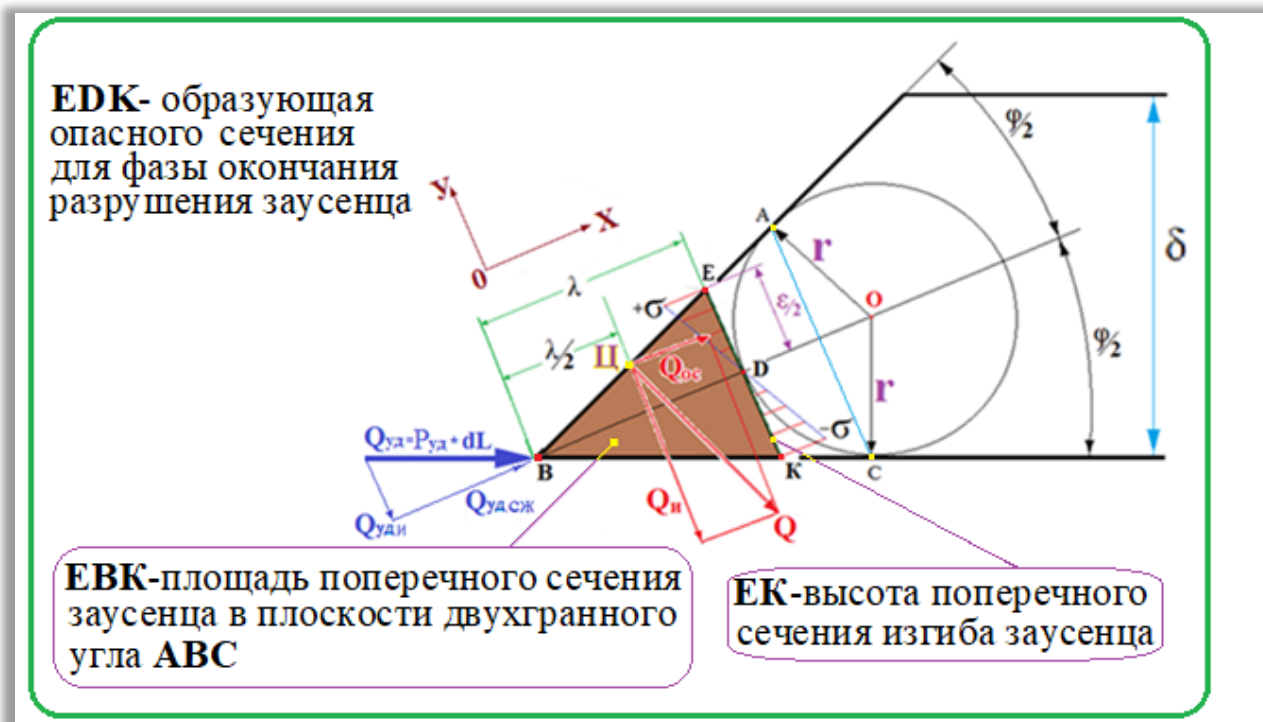


Рисунок 6 – Расчетная схема завершающей фазы излома заусенца

Figure 6. Design scheme for the final stage of the burr fracture

Расчетная схема, изображенная на рисунке 6, разработана на основании детального рассмотрения и глубокого анализа характера динамических и геометрических условий нагружения лезвия, а также декомпозиции действующих на него сил и структурирования их компонентов. Приведенная на рисунке 6 схема излома заусенца под действием нагружающих силовых факторов в виде силы  $Q$ , эквивалентной распределенным по площади силам давления  $P$ , и силы  $Q_{рез}$ , эквивалентной распределенному по длине лезвийной кромки удельному усилию резания  $P_{уд}$  измельчаемого сырья, позволяет раскрыть особенности геометрической координации векторов этих сил  $Q$  и  $Q_{рез}$  для корректного составления определяющих уравнений. Давление мясного сырья  $P$  в межвитковом шнековом пространстве в зоне резания, действующее на переднюю поверхность АВFE лезвийной кромки (рисунок 5) и формирующее равнодействующую силу  $Q$  (рисунок 6), раскладывается на две составляющих компоненты  $Q_{ос}$  и  $Q_{и}$ . Составляющая  $Q_{ос}$  совершает работу сжатия по деформации сырья, в то время как составляющая  $Q_{и}$  является для лезвия (и для заусенца жала лезвийной кромки ножа) изгибающим силовым фактором (рисунок 6).

Таким образом, переходя от распределенных силовых факторов давления  $P$  и удельного усилия резания  $P_{уд}$  к приведенным эквивалентным сосредоточенным силам  $Q$  и  $Q_{рез}$ , рассмотрим подробно полученную расчетную схему излома заусенца, для оценки остроты лезвия  $r$ , в терминах эквивалентных сосредоточенных сил, в соответствии с рисунком 6.

## *2. Разработка математической модели процесса разрушения заусенца под действием изгибающих моментов и сжимающих сил исходя из условия прочности, а также корректное обоснование максимально достижимой остроты лезвия*

Необходимо подчеркнуть, что процесс деформации и разрушения заусенца проходит в две стадии. В соответствии с рисунками 3 и 6 первая фаза характеризуется предварительным изгибом и начальным разрушением заусенца в точке А, где развиваются максимальные напряжения растяжения из-за изгиба. В этом случае в качестве расчетного опасного сечения заусенца должно фигурировать опасное плоское сечение лезвия АС. Вторая фаза процесса разрушения, которая подлежит математическому описанию, связана и обусловлена стадией процесса излома заусенца, когда в качестве расчетного опасного сечения выступает плоское сечение ЕК в соответствии с рисунками 3 и 6.

Для описания процесса излома заусенца рассмотрим подробно эту вторую, завершающую стадию деформации и разрушения заусенца. Важно и необходимо отметить следующие особенности соответствующей математической модели и расчетной схемы, приведенной на рисунке 6.

Первой особенностью разработки данной математической модели является принципиальная корректировка состава действующих и учитываемых напряжений в опасном сечении. Действительно, в математической модели при аналитическом описании остроты лезвийной кромки ножа, в работе [2] не были учтены напряжения сжатия от силовых факторов  $P$  и  $P_{уд}$ , так как их направление противоположно направлению опасных изгибных напряжений растяжения и не отдаляет результат в худшую сторону от реальной, фактической остроты режущей кромки. Однако, для еще большего приближения результата к истинному следует учитывать наличие дополнительных напряжений сжатия от указанных факторов  $P$  и  $P_{уд}$ , и произвести уточнение математической модели и количественную оценку результата. При этом напряжениями среза, по-прежнему обоснованно [10, 11], пренебрегаем.

Второй особенностью условий расчета завершающего этапа процесса отлома заусенца является уменьшение длины участка его нагружения давлением  $P$  от значения ВА до величины ВЕ и смещением центра давления мясного сырья в точку Ц (рисунок 6).

Третья особенность обусловлена изменением места расположения и уменьшением высоты опасного сечения до значения ЕК.

Решение поставленной задачи будем осуществлять, используя условие прочности [10] при разрушении заусенца длиной ВD в его поперечном сечении с высотой ЕК (рисунок 6) и размером  $dL$  (рисунок 5) по длине лезвийной кромки, под воздействием изгибающих моментов и сосредоточенных силовых факторов  $Q$  и  $Q_{уд}$ , пренебрегая их перерезывающим действием [11].

$$\sigma_{max} \leq [\sigma], \quad (1)$$

где  $\sigma_{max}$  – максимальное суммарное напряжение от изгиба и растяжения-сжатия в точке Е опасного сечения EDK (рисунок 6), МПа;

$[\sigma]$  – допускаемые напряжения прочности материала лезвия ножа, МПа.

Уравнение равновесия в проекции на ось  $OX$  (рисунок 6) для этой точки  $E$  можем записать в виде

$$\sigma_{max} = \sigma_{и}(Q_{и}) + \sigma_{и}(Q_{ос}) + \sigma_{и}(Q_{уд,и}) + \sigma_{сж}(Q_{ос}) + \sigma_{сж}(Q_{уд}). \quad (2)$$

Здесь, в соответствии с рисунком 6, обозначены следующие составляющие общего суммарного напряжения  $\sigma_{max}$  в точке  $E$ :

$\sigma_{и}(Q_{и})$  – напряжения растяжения в точке  $E$  от действия изгибающего момента  $M_{и}(Q_{и})$  проекции  $Q_{и}$  равнодействующей силы  $Q$  на ось  $OY$ , Па;

$\sigma_{и}(Q_{ос})$  – напряжения растяжения в точке  $E$  от действия изгибающего момента  $M_{и}(Q_{ос})$  проекции  $Q_{ос}$  равнодействующей силы  $Q$  на ось  $OX$ , Па;

$\sigma_{и}(Q_{уд})$  – напряжения растяжения в точке  $E$  от действия изгибающего момента  $M_{и}(Q_{уд,и})$  проекции  $Q_{уд}$  равнодействующей силы  $P_{уд}$  на ось  $OY$  (проекция  $P_{уд}$  на ось  $OX$  дает нулевой изгибающий момент), Па;

$\sigma_{сж}(Q_{ос})$  – напряжения сжатия в точке  $E$  от действия проекции  $Q_{ос}$  равнодействующей силы  $Q$  на ось  $OX$ , Па;

$\sigma_{сж}(Q_{уд})$  – напряжения сжатия в точке  $E$  от действия проекции  $Q_{уд}$  равнодействующей фактора  $P_{уд}$  на ось  $OX$ , Па.

Уравнение равновесия (2) может быть записано в классическом виде

$$\sigma_{max} = \frac{M_{и}}{W} + \frac{F}{S}, \quad (3)$$

где  $M_{и}$  – главный изгибающий момент, действующий в сечении, Нм;

$F$  – главный вектор действующих в опасном сечении сил, Н;

$W$  – момент сопротивления опасного сечения изгибу, м<sup>3</sup>;

$S$  – площадь опасного сечения, м<sup>2</sup>.

Преобразуем уравнение равновесия (2), сгруппировав по отдельности напряжения в материале заусенца от изгиба и от растяжения–сжатия, в соответствии с соотношением

$$\sigma_{max} = \sigma_{и} + \sigma_{сж}, \quad (4)$$

где

$$\sigma_{и} = \sigma_{и}(Q_{и}) + \sigma_{и}(Q_{ос}) + \sigma_{и}(Q_{уд,и}) = \frac{M_{и}}{W} = \frac{[M_{и}(Q_{и})+M_{и}(Q_{ос})+M_{и}(Q_{уд,и})]}{W}, \quad (5)$$

$$\sigma_{и} = \sigma_{и}(Q) + \sigma_{и}(Q_{уд,и}) = \frac{[M_{и}(Q)+M_{и}(Q_{уд,и})]}{W}, \quad (6)$$

$$\sigma_{и}(Q) = \sigma_{и}(Q_{и}) + \sigma_{и}(Q_{ос}) = \frac{M_{и}(Q)}{W} = \frac{[M_{и}(Q_{и})+M_{и}(Q_{ос})]}{W}, \quad (7)$$

$$\sigma_{сж} = \sigma_{сж}(Q_{ос}) + \sigma_{сж}(Q_{уд}) = \frac{(Q_{ос}+Q_{уд,сж})}{S}. \quad (8)$$

Структура уравнений (4)–(7) отображает суммарное изгибное напряжение в любой точке сечения  $EK$ . Уравнение (8) характеризует напряжение сжатия в этой точке сечения.

Рассматривая вначале знаменатель первого слагаемого соотношения (3), отметим, что момент сопротивления сечения изгибу  $W$ , при высоте сечения  $EK$  и ширине  $dL$ , согласно работе [11] и рисункам 5 и 6, определяется из выражения

$$W = \frac{dL \cdot (EK)^2}{6}. \quad (9)$$

Из геометрических условий рисунка 6 высота сечения  $EK$  может быть определена по соотношению

$$(EK) = 2 \cdot \lambda \cdot \tan \frac{\varphi}{2}. \quad (10)$$

С учетом (10) уравнение (9) принимает вид

$$W = \frac{2dL \cdot \lambda^2}{3} \cdot \tan^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (11)$$

Знаменатель второго слагаемого соотношения (3), представляющий собой площадь опасного сечения шириной  $dL$ , определяется элементарным выражением  $S = (EK) \cdot dL$  или с учетом соотношения (10)

$$S = 2 \cdot \lambda \cdot \tan \frac{\varphi}{2} \cdot dL. \quad (12)$$



Рассмотрим числитель первого слагаемого в соотношении (3), представляющий собой суммарный, главный изгибающий момент силовых факторов давления  $P$  (рисунок 5) и удельного усилия резания  $P_{уд}$  (рисунок 5).

Необходимо подчеркнуть, что равнодействующая  $Q$  сил давления  $P$  на поверхность  $ABFE$  (рисунок 5 и 6) определяется интегрированием закона распределения давления  $P$  по площади  $ABFE$ . Однако, учитывая, что размер  $\lambda$  заусенца на три и более порядков (в 1000–10000 раз) меньше длины  $MH$  поверхности лезвийной кромки (рисунок 4), принимаем допущение о равномерном характере распределения давления мясного сырья  $P$  в пределах передней поверхности лезвийной кромки  $ABFE$  (рисунок 5). Тогда можем записать для равнодействующей  $Q$ , приложенной в точке  $\Pi$  (рисунок 6) на длине лезвийной кромки  $dL$  (рисунок 3), очевидное соотношение

$$Q = P \cdot (AB) \cdot dL. \quad (13)$$

При этом, согласно рисунку 3, вектор равнодействующей силы  $Q$  имеет две векторные составляющие компоненты, изгибающую  $Q_{и}$  и осевую  $Q_{ос}$

$$\overline{Q} = \overline{Q_{и}} + \overline{Q_{ос}}. \quad (14)$$

Что касается силового фактора, обусловленного действием удельного усилия резания  $P_{уд}$ , на лезвийную кромку (рисунок 4–6), то его равнодействующая сила  $Q_{уд}$ , действующая на элементарной длине  $dL$ , определяется соотношением

$$Q_{уд} = P_{уд} \cdot dL. \quad (15)$$

Аналогично соотношению (14) можем записать  $Q_{уд}$  в виде суммы изгибающей  $\overline{Q_{уд,и}}$ , а также сжимающей  $\overline{Q_{уд,сж}}$  компонент, выражаемой уравнением (16)

$$\overline{Q_{уд}} = \overline{Q_{уд,и}} + \overline{Q_{уд,сж}}. \quad (16)$$

Исходя из рисунка 6, выражение для определения величины  $AB$  в уравнении (13) приобретает следующую форму

$$AB = \frac{\lambda}{\cos \frac{\varphi}{2}}. \quad (17)$$

Тогда, с учетом (17), уравнение (13) примет вид

$$Q = P \cdot \frac{\lambda}{\cos \frac{\varphi}{2}} \cdot dL. \quad (18)$$

В соответствии с расчетной схемой, приведенной на рисунке 6, можем записать очевидные соотношения:

$$M_{и}(Q_{и}) = Q_{и} \cdot \frac{\lambda}{2}; \quad (19)$$

$$M_{и}(Q_{ос}) = -Q_{ос} \cdot \frac{\lambda}{2} \cdot \sin \frac{\varphi}{2}; \quad (20)$$

$$Q_{и} = Q \cdot \cos \frac{\varphi}{2}; \quad (21)$$

$$Q_{ос} = Q \cdot \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (22)$$

Тогда, в соответствии с соотношением (18), из уравнений (21) и (22) получаем очевидные зависимости:

$$Q_{и} = P \cdot \lambda \cdot dL, \quad (23)$$

$$Q_{ос} = P \cdot \frac{\lambda \cdot \sin \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}} \cdot dL. \quad (24)$$

В соответствии с уравнениями (23) и (24) и рисунком 6, соотношения (19) и (20) примут вид:

$$M_{и}(Q_{и}) = P \cdot dL \cdot \frac{\lambda^2}{2}, \quad (25)$$

$$M_{и}(Q_{ос}) = -P \cdot dL \cdot \frac{\lambda^2}{2} \cdot \left(\tan \frac{\varphi}{2}\right)^2. \quad (26)$$

Подставляя (25) и (26) в (7), получим

$$M_{и}(Q) = \frac{P}{2} \cdot \lambda^2 \cdot dL \cdot \left[1 - \left(\tan \frac{\varphi}{2}\right)^2\right]. \quad (27)$$

Дополнительный, третий изгибающий момент  $M_{и}(Q_{уд,и})$  от действия сосредоточенной силы  $Q_{уд}$ , являющейся равнодействующей распределенного удельного усилия резания  $P_{уд}$  на элементарном участке лезвийной кромки длиной  $dL$  (рисунки 5 и 6), может быть вычислен в соответствии с рисунком 6 по соотношению

$$M_{и}(Q_{уд,и}) = Q_{уд,и} \cdot \lambda \cdot \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (28)$$

При этом равнодействующая  $Q_{уд}$  распределенного удельного усилия резания  $P_{уд}$  на элементарном участке лезвийной кромки длиной  $dL$ , может быть вычислена по упомянутому ранее соотношению (15).

Таким образом, соотношение (28) с учетом (15), принимает вид

$$M_{и}(Q_{уд,и}) = P_{уд} \cdot dL \cdot \lambda \cdot \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (29)$$

В результате, окончательные выражения в соотношении (5) для суммарного изгибающего момента с учетом соотношений (27) и (29), приобретает вид

$$M_{и} = \frac{P}{2} \cdot \lambda^2 \cdot dL \cdot \left[ 1 - \left( \tan \frac{\varphi}{2} \right)^2 \right] + P_{уд} \cdot dL \cdot \lambda \cdot \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (30)$$

После несложных алгебраических преобразований из (30) получим окончательное выражение для изгибающего момента  $M_{и}$

$$M_{и} = \frac{P}{2} \cdot \lambda^2 \cdot dL \frac{\cos \varphi}{\left( \cos \frac{\varphi}{2} \right)^2} + P_{уд} \cdot dL \cdot \lambda \cdot \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (31)$$

С учетом первого слагаемого соотношения (3) для напряжений растяжения при изгибе и выражения (11) для момента сопротивления сечения изгибу, в соответствии с полученным уравнением (25), величина  $\sigma_{и}(Q_{и})$  приобретает вид

$$\sigma_{и}(Q_{и}) = \frac{3P}{4 \tan^2 \frac{\varphi}{2}}. \quad (32)$$

Аналогично, решая совместно уравнения (26) и (11), получим значение напряжений растяжения в точке E от изгибающего усилия  $Q_{ос}$

$$\sigma_{и}(Q_{ос}) = -\frac{3P}{4}. \quad (33)$$

Решение системы уравнений (29) и (11) дает возможность определить напряжения растяжения при изгибе от действия силы  $Q_{уд}$ , как равнодействующей силового фактора  $P_{уд}$

$$\sigma_{и}(Q_{уд}) = \frac{3 \cdot P_{уд} \cdot \left( \cos \frac{\varphi}{2} \right)^2}{2 \cdot \lambda \cdot \sin \frac{\varphi}{2}}. \quad (34)$$

Напряжения сжатия в точке E от действия проекции  $Q_{ос}$  определяется, в соответствии с рисунком 6, очевидным соотношением

$$\sigma_{сж}(Q_{ос}) = \frac{Q_{ос}}{S}. \quad (35)$$

Площадь опасного сечения определяется соотношением (12), поэтому с учетом выражения (24) для  $Q_{ос}$ , и (12) для площади опасного сечения, соотношение (35) примет вид

$$\sigma_{сж}(Q_{ос}) = \frac{P}{2}. \quad (36)$$

Напряжения сжатия в точке E от действия на площадь опасного сечения проекции  $Q_{уд}$  на ось  $OX$  определяется выражением, подобным уравнению (35) с учетом угла  $\left( \frac{\varphi}{2} \right)$  между векторами  $Q_{уд}$  и  $Q_{уд,сж}$  (рисунок 6)

$$\sigma_{сж}(Q_{уд}) = \frac{Q_{уд} \cdot \cos \frac{\varphi}{2}}{S}. \quad (37)$$

После подстановки в (37) значений  $Q_{уд}$  и  $S$ , получим

$$\sigma_{сж}(Q_{уд}) = \frac{P_{уд} \cdot \left( \cos \frac{\varphi}{2} \right)^2}{2 \cdot \lambda \cdot \sin \frac{\varphi}{2}}. \quad (38)$$

Максимальные напряжения растяжения в точке E опасного сечения EK определяются подстановкой соотношений (32), (33), (34), (36), (38) в исходное уравнение (2) с учетом знаков, в результате чего, после ряда алгебраических и тригонометрических преобразований, получаем

$$\sigma_{max} = \frac{P}{4} \left[ 3 \left( \cot \frac{\varphi}{2} \right)^2 - 5 \right] + \frac{P_{уд} [1 + (\sin \frac{\varphi}{2})^2]}{2\lambda \sin \frac{\varphi}{2}}. \quad (39)$$

Условие сохранения прочности заусенца записывается в известном [10, 11] виде в форме уравнения (1).

Тогда для нашего случая нагружения заусенца давлением  $P$  (Па) и удельным усилием резания  $P_{уд}$  (Н/м), система уравнений (39) и (1) примет следующую форму

$$\frac{P}{4} \left[ 3 \left( \cot \frac{\varphi}{2} \right)^2 - 5 \right] + \frac{P_{уд} [1 + (\sin \frac{\varphi}{2})^2]}{2\lambda \sin \frac{\varphi}{2}} \leq [\sigma]. \quad (40)$$

Решая уравнение–неравенство (40) относительно неизвестной длины заусенца  $\lambda$ , получим

$$\lambda \geq \frac{2 P_{уд} [1 + (\sin \frac{\varphi}{2})^2]}{\{4[\sigma] - P [3(\cot \frac{\varphi}{2})^2 - 5]\} \sin \frac{\varphi}{2}}. \quad (41)$$

Максимально достижимое значение остроты жала режущей кромки, то есть минимально возможное значение радиуса  $r$  излома заусенца определим, связав между собой величины  $r$  и  $\lambda$ . Рассматривая прочностную расчетную схему, приведенную на рисунке 6, можем записать очевидное соотношение

$$\frac{r}{r+\lambda} = \left( \sin \frac{\varphi}{2} \right). \quad (42)$$

Решая теперь уравнение (42) относительно  $r$ , с учетом соотношения (41), получим искомое значение остроты режущей кромки лезвия ножа

$$r \geq \frac{2 P_{уд} [1 + (\sin \frac{\varphi}{2})^2]}{\{4[\sigma] - P [3(\cot \frac{\varphi}{2})^2 - 5]\} (1 - \sin \frac{\varphi}{2})}. \quad (43)$$

### 3. Оптимизация угла заточки ножа по критерию степени остроты лезвия

Для реальных значений конструктивных параметров лезвия и физико-механических характеристик измельчаемого мясного сырья:

$[\sigma] = 800$  МПа – допускаемые напряжения растяжения для материала (9х18) стального лезвия;

$P_{уд} = 5000$  Н/м – среднее значение удельного усилия резания для мясного сырья;

$P = 1,0$  МПа – давление на лезвие в зоне резания;

$\varphi = 24^\circ$  – угол заточки лезвия ножа, вычисления по уравнению (43) для уточненной модели излома заусенца дают величину  $r = 4,2 \cdot 10^{-6}$  м.

Попытка исследования и анализа полученного соотношения (43) на экстремум приводит к необходимости решения уравнения 11-ой степени относительно тригонометрического аргумента  $\sin \frac{\varphi}{2}$ . Аналитическое решение такого уравнения принципиально отсутствует, поэтому дальнейший анализ уравнения (43) будем осуществлять в графической интерпретации.

Проведенные расчеты параметра  $r$  остроты жала лезвийной кромки для различных углов заточки лезвия ножа иллюстрируются графиком, приведенным на рисунке 7 и таблицей.

Таблица. Расчетная зависимость остроты лезвия от угла заточки

Table. Design dependence of the cutting edge sharpness on its sharpening edge

Угол заточки, град	40	36	30	24	16	12	8	6	5	4
Радиус $r$ , мкм (острота)	5,60	4,99	4,55	4,20	3,88	3,85	4,17	5,01	6,42	13,93

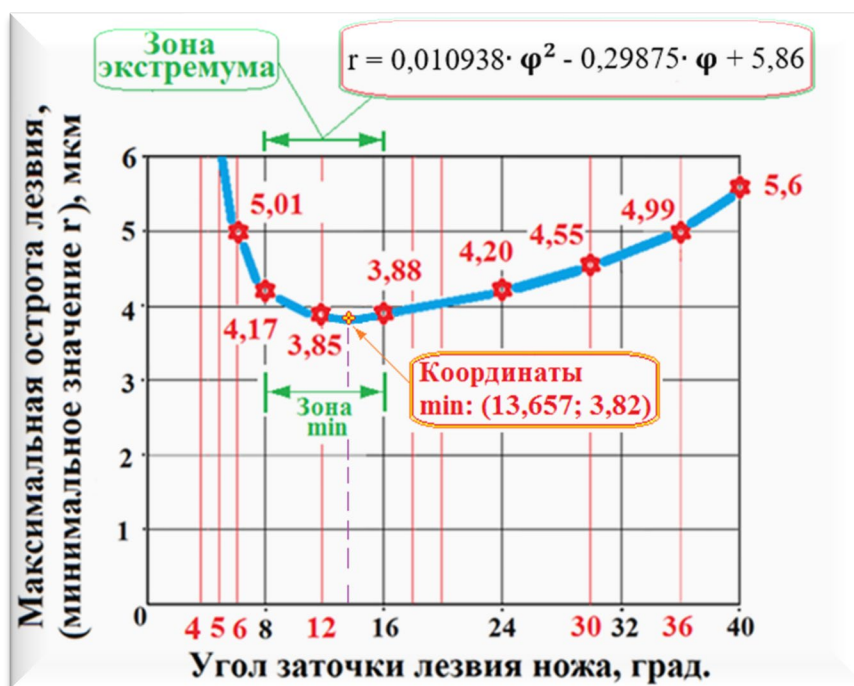


Рисунок 7 – Зависимость остроты режущей кромки лезвия ножа шекового измельчителя от угла заточки  
 Figure 7. Dependence for the sharpness of the screw grinder knife blade cutting edge on its sharpening edge

Из полученных расчетных данных и графических материалов следует, что наиболее высокий уровень заострения лезвия ножа, то есть минимальное значение радиуса кривизны жала лезвийной кромки, могут быть достигнуты при значениях угла заточки  $\phi$  в диапазоне от 12 до 16°. Анализ причинно-следственных связей силовых и тригонометрических параметров математической модели (41), (43) объясняет причины возникновения минимума для радиуса кривизны жала режущей лезвийной кромки, то есть максимума остроты лезвия. Действительно, механизм действия давления  $P$  на заусенец формируется так, что при уменьшающихся углах заточки менее 12°, тригонометрическая функция  $\cot \frac{\phi}{2}$ , и тем более  $(\cot \frac{\phi}{2})^2$ , растет существенно быстрее, чем уменьшается  $\sin \frac{\phi}{2}$  в знаменателе. Таким образом, знаменатель уменьшается значительно быстрее, чем уменьшается числитель за счет уменьшения величины  $(\sin \frac{\phi}{2})^2$ , и существенно растет величина  $\lambda$  в (41), а, следовательно, и  $r$  в (43). При возрастании углов заточки выше 16° рост величин  $\lambda$  и  $r$  обусловлен превалирующим влиянием  $P_{уд}$  на процесс деформации сжатия из-за увеличения в числителе компоненты  $(\sin \frac{\phi}{2})^2$ , и уменьшения в знаменателе компоненты  $(1 - \sin \frac{\phi}{2})$ .

Таким образом, математическая запись скорости изменения остроты лезвия при больших углах заточки может быть выражена в виде неравенства

$$\frac{dr}{d\phi} \geq 0. \tag{44}$$

При малых углах заточки неравенство (44) меняет знак на противоположный. Для уточнения координат точки экстремума, зону минимума функциональной зависимости  $r = r(\phi)$  целесообразно аппроксимировать уравнением квадратичной параболы вида

$$r = m \cdot \phi^2 + n \cdot \phi + k. \tag{45}$$

Подставляя в аппроксимирующее уравнение (45) координаты трех точек из графической зависимости для расчетной кривой при углах заточки лезвийной кромки  $\phi$ , равных 6; 8 и 12°, решим систему трех уравнений, записанных в соответствии с уравнением (45), относительно трех неизвестных коэффициентов  $m$ ,  $n$  и  $k$ , тогда получим:

$$\begin{aligned} 4,17 &= 64m + 8n + k; \\ 3,85 &= 144m + 12n + k; \\ 3,88 &= 256m + 16n + k. \end{aligned}$$



В результате решения получаем  $m = 0,0109375$ ;  $n = -0,29875$ ;  $k = 5,86$  и общее уравнение аппроксимирующей параболы примет вид

$$r = 0,0109375 \cdot \varphi^2 - 0,29857 \cdot \varphi + 5,86. \quad (46)$$

Найдем координаты точки экстремума функции  $r = r(\varphi)$ , приравняв для уравнения (46) первую производную от  $r$  по  $\varphi$  нулю, тогда получим

$$\frac{dr}{d\varphi} = 0,021875 \cdot \varphi - 0,29875 = 0. \quad (47)$$

Решая уравнение (47), получим  $\varphi_{\text{экстр}} = 13,657^\circ$ .

Определим знак второй производной от  $r$  по  $\varphi$ :  $\frac{d^2r}{d\varphi^2} = 0,021875 > 0$ , значит в точке  $\varphi_{\text{экстр}} = 13,657$  имеет место  $r = r_{\text{min}}$ . Найдем это значение по уравнению (45)

$$r(\varphi_{\text{экстр}} = 13,657) = r_{\text{min}} = 3,82 \text{ мкм.}$$

Таким образом, максимально достижимая острота лезвия при выбранных физико-механических и прочностных параметрах материала лезвия и измельчаемого материала составляет величину  $SK = 2r = 7,64$  мкм.

## Выводы

1. Доведение остроты режущей кромки до максимально возможной позволяет снизить энергоемкость процесса измельчения и повысить качество резания.
2. Реальное значение остроты лезвийной кромки при воздействии на продукт формируется и предопределено его механической прочностью, величиной угла заточки, прочностными характеристиками материала лезвия, а также давлением продукта в зоне резания.
3. Явление трансформации угла заточки при изменении угла скольжения вызывает изменение расчетной остроты лезвия и физических условий формирования абриса контура режущей кромки, что требует их учета при проектировании формы лезвия ножа.
4. Разработанная математическая модель расчета остроты жала лезвийной кромки ножа позволяет оптимизировать ее значение в зависимости от угла заточки лезвия.

## Литература

1. *Полуян В.А.* Повышение долговечности ножей мясоизмельчительных машин: автореф. дис. ... канд. техн. наук. Зерноград, 2006.
2. *Агеев О.В.* Научное обеспечение и разработка ресурсосберегающих машинных технологий первичной обработки рыбы: дис. ... д-ра техн. наук. Калининград, 2021. 862 с.
3. *Глебов И.Т.* Дереворежущий инструмент. Екатеринбург: Изд-во Уральского гос. лесотехн. ун-та, 2002. 197 с.
4. *Хроменков В.М.* Научные основы совершенствования скользящего резания пищевых материалов и разработки высокоэффективных резальных машин и ножевых измельчителей: автореф. дис. ... д-ра техн. наук. М., 1993.
5. *Бренч А.А.* Повышение эффективности процесса куттерования мясного сырья на основе разработки новых конструкций ножей: автореф. дис. ... канд. техн. наук. Могилев, 2004.
6. *Пеленко В.В., Зуев Н.А., Ольшевский Р.Г., Азаев Р.А., Кузьмин В.В., Кондратов А.В., Хатченко Е.П.* Оптимизация формы режущих элементов измельчительного оборудования // Научный журнал НИУ ИТМО. Серия: Процессы и аппараты пищевых производств. 2006. № 1.
7. *Пеленко В.В., Зуев Н.А., Ольшевский Р.Г., Азаев Р.А., Кузьмин В.В.* Фундаментальные особенности процесса резания пищевых продуктов лезвийным инструментом // Научный журнал НИУ ИТМО. Серия: Процессы и аппараты пищевых производств. 2008. № 1.
8. *Кузьмин В.В.* Совершенствование процесса резания мясного сырья на основе математического моделирования формы режущих инструментов: автореф. дис. ... канд. техн. наук. СПб., 2008. 16 с.
9. *Познышев А.Н.* Исследование способов и режимов резания мяса с учетом его структуры: автореф. дис. ... канд. техн. наук. М., 1973. 21 с.
10. *Сидоров В.Н.* Лекции по сопротивлению материалов и теории упругости. М., 2002. 352 с.
11. *Ахметзянов М.Х., Лазарев И.Б.* Сопротивление материалов. М.: Юрайт, 2011. 298 с.

## References

1. Poluyan V.A. Increasing the durability of knives of meat-grinding machines. *Extended abstract of candidate's thesis*. Zernograd. 2006. (In Russian)
2. Ageev O.V. Scientific support and development of resource-saving machine technologies for primary fish processing. *Doctor's thesis*. Kaliningrad. 2021. (In Russian)

3. Glebov I.T. *Wood-cutting tool*. Ekaterinburg, Ural State Forestry Engineering University Publ., 2002. 197 p. (In Russian)
4. Khromeenkov V.M. Scientific bases of improvement of sliding cutting of food materials and development of highly effective cutting machines and knife grinders. *Extended abstract of doctor's thesis*. Moscow, 1993. (In Russian)
5. Brench A.A. Improving the efficiency of the process of cutting meat raw materials based on the development of new knife designs. *Extended abstract of candidate's thesis*. Mogilev, 2004. (In Russian)
6. Pelenko V.V., Zuev N.A., Olshevsky R.G., Azaev R.A., Kuzmin V.V., Kondratov A.V., Khatchenko E.P. Optimization of the shape of the cutting elements of grinding equipment. *Processes and Food Production Equipment*. 2006, no. 1. (In Russian)
7. Pelenko V.V., Zuev N.A., Olshevsky R.G., Azaev R.A., Kuzmin V.V. Fundamental features of the process of cutting food products with a blade tool. *Processes and Food Production Equipment*. 2008, no. 1. (In Russian)
8. Kuzmin V.V. Improving the process of cutting meat raw materials based on mathematical modeling of the shape of cutting tools. *Extended abstract of candidate's thesis*. St. Petersburg. 2008. (In Russian)
9. Poznyshv A.N. The study of methods and modes of cutting meat, taking into account its structure. *Extended abstract of candidate's thesis*. Moscow, 1973. (In Russian)
10. Sidorov V.N. *Lectures on the resistance of materials and the theory of elasticity*. Moscow, 2002. 352 p. (In Russian)
11. Akhmetzyanov M.H., Lazarev I.B. *Resistance of materials*. Moscow, Yurayt Publ., 2011. 298 p. (In Russian)

### *Информация об авторах*

Валерий Викторович Пеленко – д-р техн. наук, профессор Высшей школы технологии и энергетики  
Василий Васильевич Нечитайлов – канд. техн. наук, доцент Высшей школы технологии и энергетики  
Владимир Павлович Иваненко – канд. техн. наук, доцент Высшей школы технологии и энергетики  
Александр Павлович Верболос – канд. техн. наук, Факультет энергетики и экотехнологий  
Григорий Владимирович Баринов – магистрант факультета биотехнологий

### *Information about the authors*

Valery V. Pelenko, D. Sc., Professor of the Higher School of Technology and Energy  
Vasily V. Nechitaylov, Ph. D., Associate Professor of the Higher School of Technology and Energy  
Vladimir P. Ivanenko, Ph. D., Associate Professor of the Higher School of Technology and Energy  
Alexander P. Verboloz, Ph. D., Faculty of the Energy and Ecotechnology  
Grigory V. Barinov, Undergraduate of the Faculty of Biotechnologies

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests

Статья поступила в редакцию 13.02.2022  
Одобрена после рецензирования 16.03.2022  
Принята к публикации 17.03.2022

The article was submitted 13.02.2022  
Approved after reviewing 16.03.2022  
Accepted for publication 17.03.2022