

УДК 65.01

Принцип виртуальных мощностей в реометрии пищевых сред

Арет В.А., valdurtera@rambler.ru, Байченко Л.А., larabaychenko@yandex.ru

Санкт-Петербургский государственный университет низкотемпературных и пищевых технологий

Рассмотрена задача моделирования течения пищевой среды методами вариационного исчисления

Ключевые слова: пищевая промышленность, вариационное исчисление

The principle of virtual capacity in foodstuff 's rheometry

Aret V.A., valdurtera@rambler.ru, Baychenko L.A., larabaychenko@yandex.ru

St. Petersburg State University of Refrigeration and Food Engineering

The problem of modeling the flow of food products with methods the calculus of variations

Keywords: food processing industry, calculus of variations

Процессы течения при переработке пищевых продуктов можно моделировать с использованием методов вариационного исчисления, которые имеют некоторые достоинства по сравнению с аналогичными задачами дифференциального исчисления. В капиллярной реометрии и в моделировании течения степенной жидкости в трубах необходимые зависимости дает вариационного принципа Мосолова-Мясникова [1]:

$$J = \int_V \varphi dv - \int_V \rho \vec{F} \cdot \vec{v} dv - \int_S \vec{G} \cdot \vec{v} dS; \quad (1)$$

$$\varphi(\varepsilon_{ij}) = \int_0^1 D(\varepsilon_{ij}) \frac{d\lambda}{\lambda}; \quad D(\varepsilon_{ij}) = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad (2)$$

где J – функционал, задача об экстремуме которого соответствует принципу виртуальных мощностей для голономных диссипативных сплошных сред; $\varphi(\varepsilon_{ij})$ – диссипативный потенциал; $D(\varepsilon_{ij})$ – функция диссипации; ε_{ij} – тензор скоростей деформации.

К числу степенных жидкостей относится тесто профилактического хлеба «Витамент» [2]. В простейшем случае капиллярной вискозиметрии при изотермическом ламинарном течении несжимаемой ньютоновской жидкости в горизонтальном капилляре (канале) имеем

$$\left. \begin{aligned} D \epsilon_{ij} &= \tau \frac{dv}{dr}; \quad \varphi \epsilon_{ij} = \frac{\eta}{2} \left(\frac{dv}{dr} \right)^2; \\ \int_V \rho \vec{F} \cdot \vec{v} dv &= 0; \end{aligned} \right\} (3)$$

$$dv = 2\pi r L dr; \quad dS = 2\pi r dr,$$

где τ – касательное напряжение; r – текущий радиус капилляра(канала); η – коэффициент динамической вязкости; L – длина капилляра (канала).

Тогда с учетом предыдущих зависимостей запишем

$$J = 2\pi \int_0^R \Phi dr = 2\pi \int_0^R \left[\frac{\eta}{2} \left(\frac{dv}{dr} \right)^2 rL + \Delta p v r \right] dr, \quad (4)$$

где R – радиус капилляра (канала).

В силу основной леммы вариационного исчисления экстремум функционала (4) по условию Эйлера–Лагранжа достигается, когда

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v'} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0, \quad (5)$$

где

$$v' = \frac{dv}{dr}$$

и

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} - \frac{\Delta p}{L \eta} = 0. \quad (6)$$

Решение уравнения (6) при условиях $v(R) = 0$, $v'(0) = 0$ дает возможность установить распределение скоростей в канале и интегрирование – формулу Пуазейля. Аналогично можно получить формулы для степенной жидкости вида :

$$\left(\frac{dv}{dr}\right)^{n+1} \frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{nr} \left(\frac{dv}{dr}\right)^n - \frac{\Delta p}{Lkn} = 0, \quad (7)$$

распределение скоростей течения

$$v = \frac{n}{n+1} \left(\frac{\Delta p}{2Lk}\right)^{\frac{1}{n}} \left(r^{\frac{1+n}{n}} - R^{\frac{1+n}{n}} \right), \quad (8)$$

расход Q жидкости определяется интегралом вида:

$$Q = 2\pi \int_R^0 r v dr = \frac{\pi n R^3}{3n+1} \left(\frac{R\Delta p}{2Lk}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad (9)$$

где n и k -индекс течения и коэффициент консистенции степенной жидкости. При $n = 1$ и $k = \eta$ формулы (8) и (9) описывают течение ньютоновских жидкостей. Данная заметка имела цель - обратить внимание на возможности использования математических методов вариационного исчисления в реологии и в моделировании процессов переработки пищевых сред.

Список литературы

1. Мосолов П.П., Мясников В.П. Вариационные методы теории течения жестко-вязко-пластичных сред . -М.:МГУ, 1971.- 114 с.
2. Андреев А.Н., Колодязная В.С., Байченко Л.А. Психореологические свойства хлеба «ВИТАМЕТ» Научный журнал СПбГУНИПТ. Серия: Процессы и аппараты пищевых производств (электронный журнал) . — №1. — март 2009. <http://processes.open-mechanics.com>