УДК 519.8: 665.37.047.79

Нестационарный массообмен в процессах удаления влаги из фосфолипидных эмульсии подсолнечного масла

С. Алтайулы, С. Т. Антипов, И.О. Павлов

Воронежский государственный университет инженерных технологий

sagimbek@mail.ru

Предложено решение задачи нестационарного массообменного процесса удаления влаги из фосфолипидной эмульсии подсолнечных масел в вакуумном цилиндрическом ротационно-пленочном аппарате с использованием метода конечных элементов.

Ключевые слова: математическое моделирование, метод конечных элементов, массообмен, фосфолипидные эмульсии, ротационно-пленочный аппарат.

Unsteady mass transfer processes in removing moisture from the phospholipid emulsion of sunflower oil

S. Altayuly,S.T. Antipov, I.O. Pavlov

Voronezh State University of Engineering Technology
sagimbek@mail.ru

Proposed solution to the problem of unsteady mass transfer processes, removal of moisture from the phospholipid emulsion of sunflower oil in a cylindrical vacuum rotary-film apparatus, using the finite element method

Keywords: mathematical modeling, finite element method, mass transfer, phospholipid emulsions, rotary-film apparatus.

Распределение высоковязкой термолабильной фосфолипидной эмульсии на внутреннюю поверхность цилиндрического корпуса аппарата осуществляется центробежной силой вращающимися лопастями ротора и создает горизонтально расположенную цилиндрическую тонкослойную кольцевую пленку. Фосфолипидная эмульсия в виде тонкой пленки перемешается вдоль ротационно-пленочного аппарата в зависимости от подачи фосфолипидной эмульсий по зазору между кромки лопасти ротора и внутренней поверхности корпуса аппарата. Преимуществом тонкого слоя при выпаривании в ротационно-пленочных аппаратах под вакуумом является малое время пребывания высоковязких жидких пищевых термолабильных продуктов в зоне нагрева.

Слой фосфолипидной эмульсии можно представить в виде кольцевой цилиндрической фигуры радиусом R, толщиной $\delta = R - R_c$, длиной L и внутренним радиусом кольца R_c. Температура внутренней стенки корпуса аппарата на этом участке нагрева поддерживается постоянной и на внутренней поверхности пленки происходит испарение под вакуумом.

Для решения задачи принимаем уравнение нестационарного массопереноса вещества $C = (r',\, z',\, t)$ в цилиндрической системе координат $(r',\, z')$ [1, 2]

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v_r \frac{\partial C}{\partial r'} + v_z \frac{\partial C}{\partial z'} = D_m \left(\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial C}{\partial r'} \right) + \frac{\partial^2 C}{\partial z'^2} \right), \quad r \in [R_c,\, R], \quad z \in [0,\, L], \quad t \in [0,\, t_k], \qquad (1)$$

с начальным условием

$$C(r',\, z', 0) = C_0, \text{ где } C_0 = const, \qquad (2)$$

и граничными условиями первого рода на границе S_1:

$$C(r',\, z',\, t)\big|_{S_1} = C_0, \qquad (3)$$

третьего рода на границе S_2:

$$-D_m \frac{\partial C(r',\, z',\, t)}{\partial r'}\bigg|_{S_2} = \beta (C_{\text{п}} - C_\infty), \qquad (4)$$

условием непроницаемости на границе S_4:

$$\frac{\partial C(r',\, z',\, t)}{\partial r'}\bigg|_{S_4} = 0, \qquad (5)$$

где v_r, v_z – компоненты вектора скорости в направлении осей r' и z', которые могут быть определены из уравнений Навье-Стокса.

В новых переменных

$$r = r' / L_\infty, \quad z = z' / L_\infty, \qquad \tau = t / t_k \tag{6}$$

уравнение (1) представим в безразмерной форме

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + u_r \frac{\partial C}{\partial r} + u_z \frac{\partial C}{\partial z} = \mathrm{K}_1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right), \quad r \in [r_c, r_k], \quad z \in [0, z_k], \quad \tau \in [0, 1], \tag{7}$$

где $r_c = R_c / L_\infty$; $r_k = R / L_\infty$; $z_k = L / L_\infty$; $u_r = v_r / v_\infty$; $u_z = v_z / v_\infty$; $v_\infty = L_\infty / t_k$; L_∞, v_∞ – масштабная длина области и базовая скорость системы соответственно. За масштабную длину принимаем наружный радиус – $L_\infty = R$.

Условия (2) – (5) в новых переменных (6) принимают вид

$C(r.\ z,\ 0) = C_0$; $C(r.\ z, \tau)\big|_{z=0} = C_0$;

$$-\left.\frac{\partial C(r,\ z,\ t)}{\partial r}\right|_{r = r_c} = \mathrm{Bi}_{\mathrm{m}} \left(C_{\text{п}} - C_\infty \right); \quad \left.\frac{\partial C(r,\ z,\ t)}{\partial r}\right|_{r = r_k} = 0. \tag{8}$$

Решение дифференциального уравнения (7) – (8) заменим другой задачей, т.е. найти распределение концентрации $C(r, z,\ \tau)$, которое минимизирует следующий функционал

$$J = \frac{1}{2} \int_V \left[\mathbf{K}_1 \left(\left(\frac{\partial C}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial C}{\partial z} \right)^2 \right) + 2C \left(\frac{dC}{d\tau} \right) \right] r\ dV + \frac{\mathrm{Bi}_{\mathrm{m}}}{2} \int_{S_2} r \left(C - C_\infty \right)^2\ dS, \tag{9}$$

где V – объем исследуемой области**;** S - площадь соответствующей поверхности.

Вся область разбивается на NE конечных элементов [3]. Тогда условие минимизации значения функционала (9) принимает следующий вид

$$\frac{\partial J}{\partial \left\{ C^{(e)} \right\}^T} = \frac{\partial}{\partial \left\{ C^{(e)} \right\}^T} \sum_{e=1}^{NE} J^{(e)} = \sum_{e=1}^{NE} \frac{\partial J^{(e)}}{\partial \left\{ C^{(e)} \right\}^T} = 0. \tag{10}$$

При этом используем четырехузловой изопараметрический конечный элемент. Для аппроксимации концентрации C во всей области конечного элемента используем функции форм следующего вида

$$C(q, s) = \sum_{i=1}^{4} N_i(q, s) C_i = [N(q, s)] \left\{ C^{(e)} \right\},$$

где $N_i(q,s)$ - функции форм; $\{C^{(e)}\}$ - вектор узловых концентраций конечного элемента, $\{C^{(e)}\} = \left[C_1^{(e)}\ C_2^{(e)}\ C_3^{(e)}\ C_4^{(e)}\right]$.

Из условия минимального значения для функционала (10) получим систему линейных дифференциальных уравнений вида

$$\left[m^{(e)}\right]\left\{\dot{C}^{(e)}\right\}+\left[k^{(e)}\right]\{C\}^{(e)}=\left\{p^{(e)}\right\}, \qquad (11)$$

где $\left[m^{(e)}\right]=\int\limits_{V^{(e)}} r\left([N]^T[N]\right)dV$; $\left\{\dot{C}^{(e)}\right\}=\left\{\dfrac{\partial C^{(e)}}{\partial \tau}\right\}$; $\left[k^{(e)}\right]=\left[k_1^{(e)}\right]+\left[k_2^{(e)}\right]+\left[k_3^{(e)}\right]$;

$\left[k_1^{(e)}\right]=K_1\int\limits_{V^{(e)}} r\left(\left[\dfrac{\partial N}{\partial r}\right]^T\left[\dfrac{\partial N}{\partial r}\right]+\left[\dfrac{\partial N}{\partial z}\right]^T\left[\dfrac{\partial N}{\partial z}\right]\right)dV$; $\left[k_2^{(e)}\right]=\mathrm{Bi_m}\int\limits_{S_3} r[N]^T[N]\,dS$;

$\left[k_3^{(e)}\right]=\int\limits_{V^{(e)}} r[N]^T u_z\left[\dfrac{\partial N}{\partial z}\right]dV$; $\left\{p^{(e)}\right\}=\mathrm{Bi_m}\int\limits_{S_2^{(e)}} r[N]^T T_\infty\,dS$.

Общая система уравнений формируется из систем линейных дифференциальных уравнений конечных элементов (11)

$$[M]\{\dot{C}\}+[K]\{C\}=\{P\}. \qquad (12)$$

Систему (13) решаем, используя схему Кранка–Николсона [4]. Предполагаем, что

$$\{C_{\tau+\Delta\tau}\}-\{C_\tau\}=\frac{\Delta\tau}{2}\left(\{\dot{C}_{\tau+\Delta\tau}\}-\{\dot{C}_\tau\}\right), \qquad (13)$$

где $\Delta\tau$ – шаг интегрирования. Из (13) выражаем скорость изменения концентрации в момент времени $\tau+\Delta\tau$ в виде следующего уравнения

$$\{\dot{C}_{\tau+\Delta\tau}\}=\{\dot{C}_\tau\}+\frac{2}{\Delta\tau}\left(\{C_{\tau+\Delta\tau}\}-\{C_\tau\}\right). \qquad (14)$$

Из выражений (12) и (14), получаем конечно-разностное уравнение для определения искомой зависимости

$$\left[\frac{2}{\Delta\tau}M+K\right]\{C_{\tau+\Delta\tau}\}=[M]\left(\frac{2}{\Delta\tau}\{C_\tau\}-\{\dot{C}_\tau\}\right)+\{P_{cp}\}, \qquad (15)$$

где $\{P_{cp}\}$ – вектор-столбец правой части уравнения (15) в момент времени $\tau+\Delta\tau/2$. Алгоритм этой схемы состоит в последовательном решении уравнения (15).

Метод конечных элементов реализован в математическом пакете символьной математики *Maple* [5], использование которого позволяет исследовать нестационарный массообменный процесс при удалении влаги из фосфолипидной эмульсии подсолнечных масел и проектировать высокоэффективные конструкции цилиндрического ротационно-пленочного аппарата.

Обозначения

$C, C_0, C_п, C_\infty$ – концентрация распределяемого вещества (влаги), кг/кг: текущая, начальная, на поверхности слоя и в ядре внешней фазы; R, R_c – наружный и внутренний радиус цилиндрического кольца слоя фосфолипидной эмульсии, м; L – длина аппарата, м; t – время протекания процесса, с; v_r, v_z – компоненты вектора скорости в направлении осей r' и z', м/ к; D_m – коэффициент диффузии, м^2/с; β – коэффициент массоотдачи, м/с; $\mathrm{K}_1 = 1/(\mathrm{Re\,Sc})$ – комплексный критерий; $\mathrm{Re} = v_\infty L_\infty / \nu$ – число Рейнольдса; $\mathrm{Sc} = \nu_\infty / D_m$ – число Шмидта; $\mathrm{Bi_m} = \beta L_\infty / D_m$ – критерий Био массообменный; ν – коэффициент кинематической вязкости, м^2/с.

Список литературы:

1. Кафаров, В. В. Основы массопередачи. [Текст] / В. В. Кафаров. – М: Высш. школа, 1979. – 439 с.
2. Лыков, А. В.Теория тепло- и массопереноса [Текст] / А. В. Лыков, Ю. А. Михайлов. – М.: Госэнегоиздат, 1963. – 563 с.
3. Сигерлинд, Л. Применение метода конечных элементов [Текст] / Л. Сигерлинд. – М.: Мир,1979. – 392 с.
4. Митчелл, Э. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными [Текст] /Э. Митчелл, Р. Уэйт. – М.: Мир,1981. – 216 с.

5. Аладьев В.З. Maple 6. Решение математических, статистических и физико-технических задач. [Текст] / В. З. Аладьев, М. А. Богдявичус. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. – 824 с.