УДК-532.51

Новый метод решения краевой задачи Дирихле для продольного обтекания тонкого тела вращения идеальной жидкостью.

Л.Н. Корниенко, Е.И. Якушенко
Санкт-Петербургский государственный университет низкотемпературных и пищевых технологий

Анализируется краевая задача Дирихле для осесимметричного продольного обтекания идеальной жидкостью тонкого тела вращения. Получено необходимое для решения уравнение движения жидкости. Найдено его фундаментальное решение. Задача Дирихле сведена к интегральному уравнению Фредгольма 1 рода, которое решено.

Ключевые слова: уравнение движения идеальной жидкости, фундаментальное решение, тонкое тело вращения, продольное обтекание, интегральное уравнение, краевая задача Дирихле, решение, поле коэффициента гидродинамического давления.

Подробное изложение вопросов, связанных с аэродинамикой тонких тел без учета и с учетом сжимаемости потока дали Ф.И.Франкль и Е.А.Карпович в своей книге [1]. После выхода в свет этой книги опубликовано большое число работ по теории обтекания тонких тел, в том числе с использованием методов возмущений жидкости [2, 3]. Основные результаты исследований в этой области систематически изложены в обзорной статье Г.Г.Черного “Теория сверхзвуковых течений жидкости” [4].

В настоящей работе предложен новый метод решения рассматриваемой задачи с использованием интегрального уравнения типа Фредгольма 1 рода для краевой задачи Дирихле, которое решено.

Первоначально получим такое дифференциальное уравнение движения жидкости, при котором можно упростить решение.

1. Осесимметричное течение жидкости. Воспользуемся условиями сплошности и отсутствия вихрей в потоке в цилиндрической системе координат [5]:

$$divV = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \upsilon_\rho) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \upsilon_z) = 0 \tag{1.1}$$

$$rot\,V = 0; \quad \frac{\partial \upsilon_\rho}{\partial z} - \frac{\partial \upsilon_z}{\partial \rho} = 0 \tag{1.2}$$

Для их преобразования используем подстановку Л.И.Седова [6]

$$\left.\begin{aligned} \upsilon_z &= \upsilon \cos\alpha \\ \upsilon_\rho &= \upsilon \sin\alpha \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

Здесь $\upsilon_z, \upsilon_\rho$ – проекции вектора скорости жидкости на цилиндрические оси Z и ρ, соответственно; υ – модуль V; α – угол между вектором скорости V и осью симметрии Z; $\alpha = \alpha(z, \rho)$ – определяет поле углов наклона к оси Z касательных к линиям тока.

После подстановки и преобразований можно записать

$$\left.\begin{aligned} divV = 0;\ & \frac{\sin\alpha}{\rho} + \frac{\partial \ln\upsilon}{\partial \rho}\sin\alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial \upsilon}\cos\alpha = -\frac{\partial \ln\upsilon}{\partial z}\cos\alpha + \sin\alpha\frac{\partial \alpha}{\partial z}. \\ rot\,V = 0;\ & \frac{\partial \ln\upsilon}{\partial z}\sin\alpha + \cos\alpha\frac{\partial \alpha}{\partial z} = -\frac{\partial \ln\upsilon}{\partial \rho}\cos\alpha - \sin\alpha\frac{\partial \alpha}{\partial \rho}. \end{aligned}\right\}$$

Из этой системы уравнений найдем дифференциальные зависимости между $\ln\upsilon$ и α.

Для краткости записей и упрощения преобразований воспользуемся определителями второго порядка и следующими обозначениями:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \ln\upsilon}{\partial \rho} = \phi'_\rho; \quad \frac{\partial \ln\upsilon}{\partial z} = \phi'_z \\ \frac{\partial \alpha}{\partial z} = \alpha'_z; \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \rho} = \alpha'_\rho \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

В результате получим

$$
\begin{cases}
\dfrac{\sin\alpha}{\upsilon} + \begin{vmatrix} \phi'_\rho & -\cos\alpha \\ \alpha'_\rho & \sin\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \phi'_z & -\sin\alpha \\ \alpha'_z & -\cos\alpha \end{vmatrix}, \\
\begin{vmatrix} \phi'_\rho & \sin\alpha \\ \alpha'_\rho & \cos\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \phi'_z & -\cos\alpha \\ \alpha'_z & \sin\alpha \end{vmatrix}.
\end{cases} \qquad (1.5)
$$

При решении этой системы уравнений воспользуемся двумя известными свойствами определителей:

Свойство I

$$
h\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & hb \\ c & hd \end{vmatrix},
$$

Свойство II

$$
\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+e \\ c & d+f \end{vmatrix}.
$$

Для получения первого решения с учетом свойства I, умножим (1.5) на $\cos\alpha$, а (1.6) на $(-\sin\alpha)$. Результат сложим почленно. С учетом свойства II получим

$$
\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\rho} + \begin{vmatrix} \phi'_\rho & -1 \\ \alpha'_\rho & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \phi'_z & 0 \\ \alpha'_z & -1 \end{vmatrix}.
$$

С учетом (1.4) из последнего уравнения будем иметь

$$
\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\rho} + \frac{\partial\alpha}{\partial\rho} = -\frac{\partial\ln\upsilon}{\partial z}. \qquad (1.6)
$$

Для получения второго решения умножим (1.5) на $\sin\alpha$, а (1.6) на $\cos\alpha$. После аналогичных преобразований найдем

$$
\frac{\sin^2\alpha}{\rho} + \begin{vmatrix} \phi'_\rho & 0 \\ \alpha'_\rho & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \phi'_z & -1 \\ \alpha'_z & 0 \end{vmatrix}.
$$

или

$$
\frac{\sin^2\alpha}{\rho} + \frac{\partial\ln\upsilon}{\partial\rho} = \frac{\partial\alpha}{\partial z}. \qquad (1.7)
$$

Дифференцируя (1.7) по ρ, а (1.8) по z и вычитая из первого второе, с учетом $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$, запишем

$$\Delta\alpha + \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{2\rho}\sin 2\alpha\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2\rho}\cos 2\alpha\right) = 0. \qquad (1.8)$$

Выражение (1.9) является нелинейным уравнением эллиптического типа. Его точное решение в [7] отсутствует.

Для возможности его дальнейшего использования линеаризируем (1.9) при малых углах α, при справедливости равенств

$$\sin 2\alpha \cong 2\alpha; \quad \cos 2\alpha \cong 1. \qquad (1.9)$$

С учетом (1.10) из (1.9) найдем искомое уравнение.

$$\Delta\alpha + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\alpha}{\partial\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} = 0. \qquad (1.10)$$

Равенство (1.11) отличается от уравнения Лапласа в цилиндрической системе координат тем, что в уравнении Лапласа отсутствует слагаемое вида $-\frac{\alpha}{\rho^2}$.

2. Фундаментальное решение. Преобразуем (1.11) с помощью подстановки

$$\alpha = \Phi\cdot\rho^n \qquad (2.1)$$

После преобразований запишем

$$\Delta\Phi + (2n+1)\rho^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + (n^2-1)\rho^{-2}\Phi = 0. \qquad (2.2)$$

Его можно существенно упростить (при $n=-1$), то есть привести к виду

$$\Delta\Phi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} = 0, \qquad (2.3)$$

где $\Phi = \alpha\rho$. (2.4)

Такое уравнение совпадает с уравнением для функции тока при осесимметричном течении идеальной жидкости в цилиндрической системе координат [5]. Его фундаментальное решение определяется следующим выражением

$$\Phi = -\frac{q}{4\pi}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + \rho^2}}\right) \tag{2.5}$$

Здесь q – интенсивность особенности.

С учетом (2.4) преобразуем уравнение (2.5)

$$\alpha = -\frac{q}{4\pi\rho}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + \rho^2}}\right) \tag{2.6}$$

Легко проверить, что это фундаментальное решение для (1.11) удовлетворяет следующим граничным условиям на бесконечности

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\rho\to\infty} \alpha(z, \rho) = 0 \\ \lim_{z\to\infty} \alpha(z, \rho) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

С учетом (2.7) фундаментальное решение (2,5) позволяет найти выражение интегрального уравнения для краевых условий на образующей $r = r(z)$ поверхности обтекаемого тела вращения, где $r(z)$ его радиус.

На поверхности тела вращения линия тока совпадает с образующей $r = r(z)$ его поверхности. Очевидно, что в этом случае должны выполняться следующие краевые условия на самой образующей:

$$\left.\begin{aligned} \alpha(z) = r'(z); \\ \rho = r(z); \\ \Phi(z) = \alpha\cdot\rho = r'(z)\,r(z); \\ \Phi(a) = \Phi(b) = r(a) = r(b) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

3. Краевое интегральное уравнение. Из (2.5) следует, что интегральное уравнение для краевых условий (2.8) можно записать в виде [5]

$$\Phi(z) = -\frac{1}{4\pi}\left(\int_a^b q(t)\,dt - \int_a^b \frac{q(t)(z-t)\,dt}{\sqrt{(z-t)^2 + r^2(z)}}\right), \tag{3.1}$$

где $(b - a)$ – длина тонкого тела; $\Phi(z)$ и $r(z)$ – известные функции; $q(t)$ – необходимо определить, как распределена интенсивность по оси симметричности z. Для того, чтобы получить аналитическое решение интегрального уравнения (3.1), его следует упростить, используя условие для тонкого тела. В этом случае можно перенести краевые условия с образующей поверхности на ось симметрии z.

В результате получим

$$\Phi(z) = -\frac{1}{4\pi}\left(\int_a^b q(t)dt - \int_a^b \frac{q(t)(z-t)dt}{|z-t|}\right). \tag{3.2}$$

Это равенство является интегральным уравнением Фредгольма 1 рода с ядром вида

$$K(z,t) = 1 - \frac{z-t}{|z-t|},$$

аналитическое решение которого можно найти.

4. Решение интегрального уравнения Фредгольма 1 рода. Если продифференцировать по переменной z уравнение (3.2), получим равенство

$$\Phi'(z) = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d}{dz}\int_a^b q(t)dt - \frac{d}{dz}\int_a^b \frac{q(t)(z-t)dt}{|z-t|}\right). \tag{4.1}$$

Здесь $\frac{d}{dz}\int_a^b q(t)dt = 0$ – как производная от постоянной величины.

С учетом [8] и особенностей второго интеграла (4.1) запишем

$$\int_a^b \frac{q(t)(z-t)dt}{|z-t|} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{z-\varepsilon}\frac{q(t)(z-t)dt}{z-t} + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{z+\varepsilon}^{b}\frac{q(t)(z-t)dt}{t-z} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{z} q(t)dt + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{z-\varepsilon} q(t)dt + \int_b^{z} q(t)dt + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_z^{z+\varepsilon} q(t)dt.$$

Откуда найдем

$$\int_a^b \frac{q(t)(z-t)dt}{|z-t|} = \int_a^z q(t)dt + \int_b^z q(t)dt \tag{4.2}$$

Подставим (4.2) в (4.1). После дифференцирования (4.2) получим искомое решение уравнения (3.2)

$$\Phi'(z) = \frac{1}{2\pi} q(z)$$

или

$$q(z) = 2\pi\,\Phi'(z), \tag{4.3}$$

где $\Phi(z) = r(z)\,r'(z)$ известная функция.

При известной интенсивности $q(z) = 2\pi\,\Phi'(z)$ поле углов наклона касательных к линиям тока в жидкости обтекающей данное тело будет определяться выражением

$$\alpha(z,\rho) = -\frac{1}{2\rho}\left[\int_a^b \Phi'(t)\,dt - \int_a^b \frac{\Phi'(t)(z-t)\,dt}{\sqrt{(z-t)^2+\rho^2}}\right],$$

где первый интеграл с учетом (2.8) равен нулю.

В этом случае запишем последнее уравнение следующим образом

$$\alpha(z,\rho) = -\frac{1}{2\rho}\int_a^b \frac{\Phi'(t)(z-t)\,dt}{\sqrt{(z-t)^2+\rho^2}}\,. \tag{4.4}$$

Из (4.4) видно, что $\alpha(z,\rho)$ удовлетворяет нулевым граничным условиям на бесконечности при $z \to \infty$ и при $\rho \to \infty$, учитывая (2.8).

5. Величина коэффициента гидродинамического давления на поверхности обтекаемого тела.

Для определения поля гидродинамического давления вокруг обтекаемого тела и на его поверхности воспользуемся уравнениями (1.7) и (1.8) при малой величине угла α, которые в этом случае примут вид

$$\frac{\partial \ln \upsilon}{\partial \rho} = \frac{\partial \alpha}{\partial z} \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial \ln \upsilon}{\partial z} = -\frac{\partial \alpha}{\partial \rho} - \frac{\alpha}{\rho} \tag{5.2}$$

Используя (4.4) найдем производную $\dfrac{\partial \alpha}{\partial z}$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial z}(\alpha, z) = \frac{1}{2\rho}\int_a^b \frac{\Phi'(t)\,dt}{\left[(z-t)^2+\rho^2\right]^{1/2}} - \frac{1}{2\rho}\int_a^b \frac{\Phi'(t)(z-t)^2\,dt}{\left[(z-t)^2+\rho^2\right]^{3/2}} \tag{5.3}$$

Подставим (5.3) в (5.1) и результат проинтегрируем по переменной ρ. Получим

$$
\ln \upsilon = \int \frac{\partial \alpha}{\partial z} d\rho = \frac{1}{2}\int_a^b \Phi'(t)dt \int \frac{d\rho}{\rho\left[\rho^2 + (z-t)^2\right]^{1/2}} -
$$

$$
-\frac{1}{2}\int_a^b \Phi'(t)(z-t)^2 dt \int \frac{d\rho}{\rho\left[\rho^2 + (z-t)^2\right]^{3/2}} + C(z) \tag{5.4}
$$

После вычисления неопределенных интегралов и упрощений в (5.4) будем иметь

$$
\ln \upsilon = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\Phi'(t)dt}{\left[\rho^2 + (z-t)^2\right]^{1/2}} + C(z) \tag{5.5}
$$

Определим значение функции $C(z)$.

Для этого найдем производную $\frac{\partial \ln \upsilon}{\partial z}$ из (5.5), выражения $\frac{\partial \alpha}{\partial \rho}$ и $\frac{\alpha}{\rho}$ с использованием (4.4), которые будут равны

$$
\frac{\partial \ln \upsilon}{\partial z} = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\Phi'(t)(z-t)dt}{\left[\rho^2 + (z-t)^2\right]^{3/2}} + C'(z) \tag{5.6}
$$

$$
\frac{\partial \alpha}{\partial \rho} = -\frac{1}{2\rho^2}\int_a^b \frac{\Phi'(t)(z-t)dt}{\left[\rho^2 + (z-t)^2\right]^{1/2}} - \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\Phi'(t)(z-t)dt}{\left[\rho^2 + (z-t)^2\right]^{3/2}} \tag{5.7}
$$

$$
\frac{\alpha}{\rho} = \frac{1}{2\rho^2}\int_a^b \frac{\Phi'(t)(z-t)dt}{\left[\rho^2 + (z-t)^2\right]^{1/2}} \tag{5.8}
$$

Подставим (5.6), (5.7) и (5.8) в уравнение (5.2). После сокращений определим, что

$$
C'(z) = 0,
$$

$$
\text{т.е.} \quad C(z) = C_1 = const. \tag{5.9}
$$

Так как C_1 произвольная постоянная, будем полагать, что

$$
C_1 = \ln \upsilon_\infty \tag{5.10}
$$

Подставим (5.10), с учетом (5.9), в (5.5). После преобразования найдем выражение

$$
\upsilon = \upsilon_\infty \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_a^b \frac{\Phi'(t)dt}{\left[\rho^2 + (z-t)^2\right]^{1/2}}\right\}, \tag{5.11}
$$

которое определяет поле скоростей в осесимметричном потоке жидкости.

Для определения значений коэффициента гидродинамического давления $\bar{p}$ в жидкости воспользуемся его известным выражением [9]

$$\bar{p} = 1 - \left(\frac{\upsilon}{\upsilon_\infty}\right)^2 \qquad (5.12)$$

Подставим в последнее уравнение равенство (5.11) и запишем

$$\bar{p} = 1 - \exp\left\{-\int_a^b \frac{\Phi'(t)\,dt}{\left[\rho^2 + (x-t)^2\right]^{1/2}}\right\}, \qquad (5.13)$$

где $\Phi'(t) = \left[r'(t)\right]^2 + r(t)\,r''(t)$.

При определении распределения коэффициента давления $\bar{p}_s$ вдоль обтекаемой поверхности в уравнении (5.13) нужно выполнить условие $\rho = r(x)$. Окончательно найдем

$$\bar{p}_s = 1 - \exp\left\{-\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \frac{\Phi'(t)\,dt}{\left[r^2(x) + (x-t)^2\right]^{1/2}}\right\}, \qquad (5.14)$$

где в пределах интегрирования добавляется малая величина ε ввиду того, что $r'(a) = \infty$, $r'(b) = \infty$.

6. Заключение. Решение (5.134) является достаточно общим. С его помощью можно, например, исследовать обтекание идеальной жидкостью тонкого слабо гофрированного тела и т.д.

Используя полученные результаты, можно так же определить поле линий тока и поле гидродинамического давления в потоке обтекающем тонкое тело вращения.

Список литературы.

1.Франкль Ф.И., Карпович Е.А. Газодинамика тонких тел. М.;Л. ГИТТЛ, 1948.176 с.

2.Ван-Дайк. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 312 с.

3.Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 276 с.

4.Черный Г.Г. Теория сверхзвуковых течений газа. //В кн. Механика в СССР за 50 лет. Т.2/ М.: Наука, 1970.

5.Кочин Н.С., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч.1. М.: ГИТТЛ, 1955. 560 с.

6.Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. 444 с.

7.Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Нелинейные уравнения математической физики. Точные решения. Справочник. М.: ФМЛ, 2002. 432 с.

8.Полянин А.Д., Манжиров А.В. В.Ф. Справочник по интегральным уравнениям. М.: ФМЛ, 2003. 608 с.

9.Федяевский К.К., Войткунский Я.И., Фаддеев Ю.И. Гидромеханика. Л.: Судостроение, 1968. 568 с.

Лев Николаевич Корниенко.

198261, СПб., пр. Ветеранов, д. 105, кв. 162

д.т. (812) 759-98-28, моб. 8-921-390-13-94

д.т.н., профессор кафедры теоретической механики СПб ГУН и ПТ

р.т. (812) 575-69-07, электронный адрес отсутствует

Евгений Иванович Якушенко.

19660_,