Решение задачи диффузии в мембране применительно к разделению эмульсий.

Вороненко Б.А., Пеленко В.В., Поляков С.В.

Поставлена и решена аналитически краевая задача диффузии, описывающая механизм баромембранного разделения компонентов эмульсий в технологическом процессе производства крема кондитерского

Ключевые слова: математическое описание, диффузия, мембрана, микрофильтрация, эмульсия, пермеат, дисперсная фаза

Эмульсии - это системы, состоящие из двух несмешивающихся жидких фаз, одна из которых диспергирована в другой. Различают эмульсии прямого типа – «масло в воде» и обратного типа – «вода в масле». Концентрация дисперсной фазы в жидкостях может варьироваться от очень малой (капельки свободно плавают в дисперсионной среде) до очень большой – 95 – 99% (дисперсионная среда составляет только тонкие прослойки между капельками) [1].

Наиболее перспективный метод разделения эмульсий, особенно тонкодисперсных - микрофильтрация [2 - 4]. С её помощью можно повысить содержание эмульгированного масла в водной эмульсии с 1 – 10 до 90%, получая в пермеате практически чистую воду [3].

Для прогнозирования процессов разделения эмульсий, выбора оптимальных условий проведения этих процессов необходимы соответствующие математические описания.

Количественное описание диффузионных процессов, происходящих в мембране – технологической перегородке, обеспечивающих из-за своих свойств селективной проницаемости разделение веществ в основном без химических превращений – базируется на трёх основных подходах: статистическом, термодинамическом и феноменологическом [5].

На основе феноменологического подхода некоторые задачи поставлены и решены Н.И. Николаевым [5]. В настоящей работе рассмотрена диффузионная краевая задача, дополняющая исследования автора [5].

Через плоскую мембрану определенных размеров (толщиной L и площадью S) из ограниченного объема V, содержащего вещество концентрации C_o, диффундирует это вещество в объём с постоянной концентрацией C_c.

Предполагается, что диффузионные потоки с торцов мембраны отсутствуют.

Математическое описание исследуемого процесса заключается в решении одномерного уравнения нестационарной диффузии

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}; \qquad (0< x <L, \tau> 0) \qquad (1)$$

при следующих начальных и граничных условиях:

$$C(x,0) = 0; \qquad (2)$$

$$V\frac{\partial C(0,\tau)}{\partial \tau} = -DS\frac{\partial C(0,\tau)}{\partial x} \qquad (3)$$

$$C(L,\tau) = C_c = \text{const} \qquad (4)$$

Здесь (2) – начальное условие, заключающееся в том, что в момент начала процесса плоская мембрана не содержит диффундирующего вещества.

Граничное условие (3) показывает, что интенсивность изменения концентрации диффундирующего вещества на границе мембраны с объемом V вызывает поток массы диффундирующего вещества внутрь мембраны.

Граничное условие первого рода (4) отражает тот факт, что продиффундированное через мембрану вещество поступает в достаточно большой объем, не изменяющее концентрации этого вещества C_c, либо быстро отводится от мембраны.

Решение краевой задачи диффузии (1) – (4) методом интегрального преобразования Лапласа приводит к следующему выражению для распределения концентрации диффундирующего вещества в мембране:

$$\theta(X, Fi) = \frac{C(x,\tau)}{C_c} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\delta\cos(\mu_n X) + \mu_n \sin(\mu_n X))}{\mu_n^2 - \delta(1-\delta)\cos\mu_n} exp(-\mu_n^2 Fi) \ , \quad (5)$$

где

μ_n – последовательные положительные корни характеристического уравнения

$$\text{ctg}\mu = -\frac{\mu}{\delta} \quad (6)$$

Усреднение по объему безразмерной концентрации θ(X, Fi) по формуле

$$\bar{\theta}(Fi) = \int_0^1 \theta(X, Fi) dX \quad (7)$$

приводит к выражению для массы поглощаемого мембраной диффундирующего вещества:

$$\bar{\theta}(Fi) = \frac{\bar{c}(\tau)}{c_c} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\left[1 + \left(1 + \frac{\delta}{\mu_n}\right)^2 \cos\mu_n\right]}{\mu_n^2 - \delta(1-\delta)\cos\mu_n} exp(-\mu_n^2 Fi) \quad (8)$$

Для малых значений Fi решение (5) мало удобно. Наиболее пригодное для малых значений Fi решение получено в следующем виде:

$$\theta(X, Fi) = \frac{C(x,\tau)}{C_c} = erfc\,\frac{1-X}{2\sqrt{Fi}} + erfc\,\frac{1+X}{2\sqrt{Fi}} \quad (9)$$

где

erfcZ = 1 – erfZ = $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_Z^{\infty} e^{-Z^2} dZ$,

erfZ = $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{Z} e^{-Z^2} dZ$, - функция ошибок Гаусса (табулирована).

Обозначения

C=C(x, τ) – концентрация вещества, диффундирующего в мембране;

$\theta(X, Fi) = \frac{C(x,\tau)}{C_c}$ - безразмерная концентрация;

C_C – концентрация среды, в которую поступает продиффундированное через мембрану вещество;

x – текущая координата;

L – толщина мембраны;

τ – время;

D– коэффициент молекулярной диффузии;

V – объем;

S – площадь плоской мембраны;

$Fi = \frac{D\tau}{L^2}$ - число Фика (диффузионный критерий Фика);

$X = \frac{x}{L}$ – безразмерная координата, $0<X<1$;

$\delta = \frac{V}{LS}$

Литература

1. Войткус В.В. Гомогенизация молока. – М.: Пищевая промышленность, 1967 – 216 с.
2. Дытнерский Ю.И. Обратный осмос и ультрафильтрация. – М.: Химия, 1978 – 352 с.
3. Дытнерский Ю.И. Паромембранные процессы. Теория и расчет. – М.: Химия, 1986 – 272 с.
4. Membrane Filtration, ed. B.J.Dutka, Marsel Dekker Inc., 1981. – 612 p.
5. Николаев Н.И. Диффузия в мембранах. – М.: Химия, 1980 – 232 с.

Solution to the problem of diffusion in a membrane applied to the separation of emulsions.

Voronenko B.A, Pelenko V/V, Polyakov S.V

We pose and solve analytically the diffusion boundary value problem describing the mechanism baromembrane separation of the components of emulsions in the production process of a cream pastry

Key words: mathematical description of diffusion, membrane, microfiltration, emulsion, permeate the dispersed phase