

Гидродинамическая модель измельчения кальцийсодержащих пищевых добавок

асп. Даниленко Е.А., проф. Алексеев Г.В.

Санкт-Петербургский государственный университет
низкотемпературных и пищевых технологий,
gva2003@rambler.ru

В настоящей статье рассмотрены вопросы обогащения функциональных продуктов питания минеральными веществами, в частности, кальцием. Для этой цели используется измельченная яичная скорлупа. Изучение ранее предпринимавшихся попыток показало, что определенным ограничением в поиске оптимальных соотношений получаемой пищевой добавки в рецептуре бисквитного теста является степень дисперсности. Также предложена модель гидродинамического измельчения используемого сырья (предварительно дробленой яичной скорлупы). Предпринятый численный анализ говорит о принципиальных возможностях достижения поставленной цели с помощью предложенной модели.

Ключевые слова: измельчение, пищевая добавка, функциональное питание, яичная скорлупа, модель кавитационно-истирающего процесса.

В рамках проводимых различными исследователями работ выяснено положительное влияние кальцийсодержащих пищевых добавок на потребительские свойства продуктов функционального питания. Поиск их оптимального соотношения в рецептуре, например бисквитного теста, был ограничен размерами частиц достигаемых при ручном помоле яичной скорлупы, выступавшей в качестве сырья для таких добавок.

Результаты исследований показали, что органолептические показатели и питательные свойства могут улучшиться при увеличении дисперсности.

Таким образом, представляется актуальным изучение вопроса получения более мелких фракций яичной скорлупы при использовании аналитических моделей, например, гидродинамического разрушения ее фрагментов, предварительно подвергнутых механическому воздействию [1].

При предварительном измельчении фрагменты яичной скорлупы под действием механических воздействий приобретают множественные трещины-

дефекты. На твердую границу такого дефекта, образованного в фрагменте скорлупы помещенного в жидкую среду и заполняемого ею, накладывается условие ограничения по конфигурации поверхности, близкой к эллиптической форме. При сообщении окружающей жидкости некоторой скорости относительно фрагмента скорлупы в результате воздействия транзитного потока на жидкость в выемке в последней возникает вращательное движение. Если не учитывать сопротивления движению жидкости, возникающего от влияния ее твердой и жидкой границ, то это движение, обусловленное указанными геометрическими связями, будет происходить по концентрическим замкнутым траекториям с равномерной окружной скоростью.

Обеспечивающие подобное движение силы могут быть представлены в виде функций окружной скорости движения жидкой частицы вдоль эллиптической траектории. Пусть движение жидких частиц описывается уравнением эллипса в следующем виде:

$$\Psi = q \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right),$$

где Ψ — функция тока;

x, y — текущие координаты жидкой частицы в декартовой системе;

a, b — большая и малая, соответственно, полуоси эллипсов, по которым движется жидкая частица;

q — постоянный параметр.

Составляющую окружной скорости вдоль оси Ox запишем в виде:

$$U_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{2q}{b^2} y,$$

а составляющую вдоль оси Oy определим как:

$$U_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{2q}{a^2} x.$$

В этом случае проекции силы равномерного движения жидкости по эллиптическим траекториям на оси координат можно представить так:

$$N_x = \kappa_1 \cdot u_x = \kappa_1 \cdot \frac{2q}{b^2} y = c_1 y,$$

$$N_y = \kappa_2 \cdot u_y = \kappa_2 \cdot \frac{2q}{a^2} x = c_2 x,$$

где $\kappa_1, \kappa_2, c_1, c_2$ — постоянные коэффициенты.

На самом деле, поскольку рассматриваемое движение жидкости в дефекте является неравномерным в течение периода её обращения, за счёт возникающих при этом сил сопротивления, следует учесть внутреннюю силу сопротив-

ления движению жидкости в каверне. Она возникает от влияния вязкости, благодаря которой главным образом происходит диссипация энергии, накопленной жидкостью в каверне от транзитного потока.

Эту силу сопротивления логично принять пропорциональной скорости движения жидкости в каверне и представить в виде:

$$T_1 = -\lambda V^n,$$

где λ — некоторый коэффициент пропорциональности;

V — линейная скорость неравномерного движения жидкой частицы вдоль эллиптических, но уже неконцентрических траекторий;

n — показатель степени, который может изменяться в пределах от 1 до 2.

Составляющие силы сопротивления T_1 вдоль координатных осей теперь запишутся следующим образом:

- вдоль оси Ox

$$T_{1x} = -\lambda \left(\frac{dx}{dt} \right)^n,$$

- вдоль оси Oy

$$T_{2y} = -\lambda \left(\frac{dy}{dt} \right)^n.$$

Знак «минус» указывает на то, что силы сопротивления направлены в противоположном направлении скорости движения жидкости.

Кроме указанных сил, должны быть также учтены силы сопротивления, возникающие на поверхности раздела между транзитным потоком и жидкостью в дефекте. Эти силы можно записать в виде функции относительной скорости движения жидкости на поверхности раздела, выразив её через скорость транзитного потока v_0 и соответствующую неравномерность окружной скорости движения жидкости в дефекте вдоль оси Ox $\frac{dx}{dt}$.

Учитывая эти соображения имеем:

$$T_2 = \varphi \left(v_0 \pm \frac{dx}{dt} \right).$$

Знак « \pm » перед производной $\frac{dx}{dt}$ показывает, что в общем случае скорость движения жидкости в дефекте может отличаться от скорости транзитного потока на некоторую величину. Выберем для определенности в нашем случае знак минус, предполагая, что при подобном взаимодействии может существовать

тенденция к отставанию скорости движения жидкости в дефекте против скорости транзитного потока.

Составим динамические уравнения движения жидкой частицы в выемке, предположив, что весом частицы можно пренебречь.

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} F_x &= T_{1x} + N_x + T_2 \\ F_y &= T_{1y} + N_y \end{aligned}, \quad (1)$$

где через F_x и F_y обозначены проекции равнодействующей силы на координатные оси.

Перепишем систему (1), подставляя значения найденных ранее сил и их проекций, а также учитывая, что $F = mw$, где m — масса жидкой частицы, а w — её ускорение. В этом случае получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda \left(\frac{dx}{dt} \right)^n - c_1 y &= \varphi \left(v_0 - \frac{dx}{dt} \right), \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} + \lambda \left(\frac{dy}{dt} \right)^n + c_2 x &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Полученная система представляет собой неоднородную нелинейную систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

С помощью полученных уравнений можно провести исследования различных состояний жидкости в дефекте в зависимости от характера внешних связей и воздействия со стороны главным образом транзитного потока, проходящего мимо. Достижение определенных значений ускорений потока связано с появлением центробежных сил вызывающих напряжения соизмеримые с прочностью материала. Это вызывает разрушение материала и отделение частиц меньших по сравнению с первоначальным дефектом размеров. Итерационный характер такого разрушения позволит добиться любой заданной дисперсности при измельчении [2].

Учитывая, что в общем случае составляющие силы сопротивления T_i вдоль координатных осей могут зависеть от степени механического воздействия на первоначальные фрагменты, следует дополнительно предположить зависимость коэффициента λ в уравнениях системы (2) соответственно в первом уравнении от x , а во втором от y .

Для получения решений записанной системы уравнений традиционный метод Рунге-Кутты дает достаточно существенные погрешности, а для некоторых значений коэффициентов — расходится.

В связи с этим для решения системы записанных дифференциальных уравнений можно рекомендовать метод Булирша-Штера, который не только более

экономичен с точки зрения использования ресурсов вычислительной системы, но и дает возможность построения фазового портрета решения системы.

Полученные результаты отражены на рисунке.

Статистическая обработка полученных численных значений методом наименьших квадратов позволила записать для приведенных решений следующие уравнения регрессии:

$$\begin{aligned} dx/dt &= 1.77 - 15.01t + 2.16t^2, \\ dy/dt &= 0.27 - 2.85t + 2.06t^2. \end{aligned}$$

Зная зависимость компонент скорости по координатам от времени, легко вычислить и саму скорость, а по ней посчитать величину действующей на стенки каверны центробежной силы по известной формуле:

$$F = \frac{mV^2}{r}.$$

Дифференцируя полученную зависимость легко определить время, при котором величина центробежной силы будет достигать экстремальных значений для каждой заданной величины транзитной скорости V_0 .

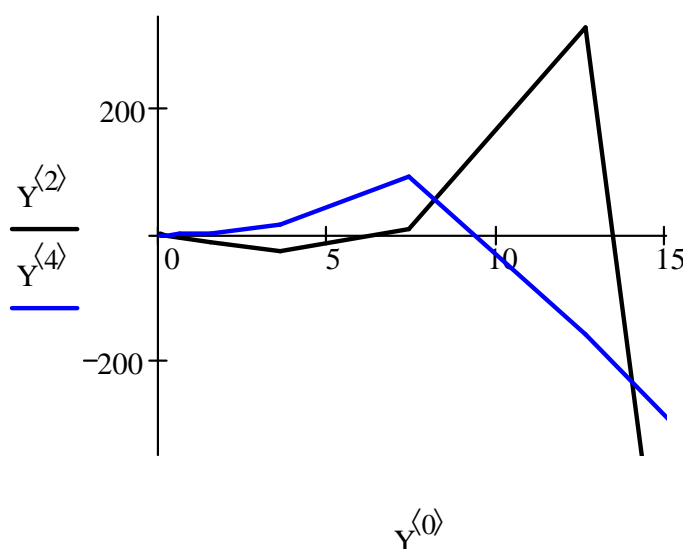


Рис. Зависимость dx/dt (Y^2) и dy/dt (Y^4) от времени (Y^0).

Практическая реализация решений, получаемых для описанной модели, например в кавитационно-истирающих мельницах позволит выявить необходимые режимы для измельчения пищевой добавки до нужной кондиции и, как следствие, определит оптимальные количества содержания пищевой добавки в рецептуре кондитерских изделий.

Экспериментальное значение содержания кальция в готовом полуфабрикате (на примере бисквита основного) в 12–15 раз выше расчетного. А это означает, что смесь муки со скорлупой яиц в процессе приготовления бисквитного

теста дает ценный кальцийсодержащий продукт, способный удовлетворить суточную потребность в кальции, как для ребенка, так и для взрослого.

Список литературы

1. Даниленко Е.А., Алексеев Г.В. Совершенствование использования минеральных добавок в производстве бисквита, Тезисы докладов X Международной конференции молодых ученых «Пищевые технологии и биотехнологии» (13–16 апреля 2010 года), Казань, 2010
2. Алексеев Г.В., Кондратов А.В., Верболоз Е.И. Модель кавитационного разрушения пищевого сырья. Хранение и переработка сельхозсырья, №11, 2007, с. 56–59

Hydrodynamic model of pounding calcium containing food additives

Danilenko E.A., Alexeyev G.V.

Saint-Petersburg State University of Refrigeration
and Food Engineering

Within the frames of works carried out by various investigators positive effect of calcium containing food additives on consumer properties of functional foods became manifest.

Keywords: milling, food additive, functional foods, eggshell, model of cavitation abrasion.