УДК 637.5

Математическая модель процесса обвалки реберного мяса

Д.т.н. Пеленко В.В., асп. Азаев Р.А.,
магистрант Иванов Р.А., студентка Фукс Е.В.

Санкт-Петербургский государственный университет
низкотемпературных и пищевых технологий

В статье рассматривается модель работы установки для обвалки реберного мяса. Определены величин перемещения и усилий тяговых штанг, кривизны поверхности толкателя установки, мощности привода установки, напряжений, возникающих в элементах, узлах, костном и мясном сырье. Пользуясь полученными соотношениями представляется возможным рассчитать геометрические и другие параметры установки для обвалки реберного мяса.

Рассматривая физическую модель работы установки для обвалки реберного мяса, можно составить схему действия сил и нагружения реберной кости.

Определение величин перемещения и усилий тяговых штанг ($\overline{P}$), кривизну поверхности толкателя установки и его усилия ($\overline{N}$), мощности привода установки, напряжений, возникающих в элементах, узлах, костном и мясном сырье, связано с решением дифференциального уравнения упругой линии балки.

В связи с тем что интенсивность “q” нагрузки на реберную кость со стороны мясного сырья пропорциональна вертикальному перемещению “y” и направлена в сторону, противоположную оси “y” можно записать:

$$q = -ny\,, \tag{1}$$

где n – коэффициент пропорциональности, представляющий собой текущее значение напряжения, отрывающего соединительную ткань от кости.

Дифференциальное уравнение упругой линии имеет следующий известный вид [1]:

$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} = M_{изг}\,. \tag{2}$$

Дифференцируя уравнение (2) дважды, получим:

$$EI\,\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d^2M_{изг}}{dx^2}\,. \tag{3}$$

Учитывая дифференциальную зависимость:

$$\frac{d^2M_{изг}}{dx^2} = q \tag{4}$$

и уравнение (1), запишем (2) в следующей форме:

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}+ny=0. \tag{5}$$

Обозначим $\frac{n}{EI} = 4k^4y$, получим известное уравнение изогнутой оси балки на упругом основании

$$\frac{d^4y}{dx^4}+4k^4y=0. \tag{6}$$

Как известно [2] решениями уравнения (6) являются произведения тригонометрических и гиперболических функций Sinkx * shkx, Coskx*chkx, Shkx*Coskx, chkx*Sinkx, а так же любые их линейные комбинации.

Наиболее удобными для решения следует выбрать функции Крылова – комбинации, предложенные А.Н. Крыловым. Они удобны тем, что производная от каждой из этих функций дает какую – либо другую из этих же функций.

Таблица функций Крылова имеет [2] нижеследующий вид.

Таблица 1.

n	$Y_n(kx)$	$Y_n^I(kx)$	$Y_n^{II}(kx)$	$Y_n^{III}(kx)$	$Y_n^{IV}(kx)$
1	Chkx*Coskx	$-4kY_4$	$-4k^2Y_3$	$-4k^3Y_2$	$-4k^4Y_4$
2	½(chkx*Sinkx+shkx*Coskx)	kY_1	$-4k^2Y_4$	$-4k^3Y_3$	$-4k^4Y_2$
3	1/2shkx*Sinkx	kY_2	k^2Y_1	$-4k^3Y_4$	$-4k^4Y_3$
4	¼(chkxSinkx-shkxCoskx)	kY_3	k^2Y_2	k^3Y_1	$-4k^4Y_4$

В таком случае в результате дифференцирования уравнения (6), выражение для вертикального перемещения “y” запишется:

$$y=y_0Y_1(kx)+y_0'\frac{1}{k}Y_2(kx)+\frac{M_0}{EI}\frac{1}{k^2}Y_3(kx)+\frac{Q_0}{EI}\frac{1}{k^3}Y_4(kx), \tag{7}$$

где y_0, y_0', M_0, Q_0 — соответственно перемещения, угол поворота, изгибающий момент и поперечная сила при x=0.

Если принять за начало отсчета левый край бруса, то, с учетом малой кривизны, очевидно,

$$Q_0=0;\quad M_0=0.$$

Величины y_0 и y'_0 определим из граничных условий:

при $x=\frac{l}{2}$, $y_0=0$, $Q=\frac{N}{2}$.

С учетом соотношений таблицы 1 получаем:

$$\frac{1}{k}y' = -4y_0Y_4(kx) + y_0'\frac{1}{k}Y_1(kx); \tag{8}$$

$$\frac{1}{k^2}y'' = -4y_0Y_3(kx) - y_0'\frac{4}{k}Y_4(kx); \tag{9}$$

$$\frac{1}{k^3}y''' = -4y_0Y_2(kx) - y_0'\frac{4}{k}Y_3(kx). \tag{10}$$

Граничные условия примут следующий вид:

$$-4y_0Y_4(\frac{kl}{2}) + y_0'\frac{1}{k}Y_1(\frac{kl}{2}) = 0; \tag{11}$$

$$-4y_0Y_2(\frac{kl}{2}) - y_0'\frac{4}{k}Y_3(\frac{kl}{2}) = \frac{N}{2EIk^3}. \tag{12}$$

Из уравнений (11) и (12) найдем перемещение y_0 угол поворота y_0'балки при x=0.

$$y_0 = \frac{N}{8EIk^3}\frac{-Y_1(\frac{kl}{2})}{Y_2(\frac{kl}{2})Y_1(\frac{kl}{2}) + 4Y_3(\frac{kl}{2})Y_4(\frac{kl}{2})}; \tag{13}$$

$$\frac{y_0'}{k} = \frac{N}{8EIk^3}\frac{-Y_4(\frac{kl}{2})}{Y_2(\frac{kl}{2})Y_1(\frac{kl}{2}) + 4Y_3(\frac{kl}{2})Y_4(\frac{kl}{2})}. \tag{14}$$

Величины y, y' и y'' принимают в таком случае вид:

$$y = -N_0[Y_1(\frac{kl}{2})Y_1(kx) + Y_4(\frac{kl}{2})Y_2(kx)]; \tag{15}$$

$$y' = 4N_0k[Y_1(\frac{kl}{2})Y_4(kx) - Y_4(\frac{kl}{2})Y_2(kx)]; \tag{16}$$

$$y'' = 4N_0k^2[Y_1(\frac{kl}{2})Y_3(kx) + Y_4(\frac{kl}{2})Y_4(kx)], \tag{17}$$

где

$$N_0 = \frac{N}{8EIk^3}\frac{1}{Y_1(\frac{kl}{2})Y_2(\frac{kl}{2}) + 4Y_3(\frac{kl}{2})Y_4(\frac{kl}{2})}. \tag{18}$$

Неопределенной величиной в полученной модели является коэффициент пропорциональности “n” в уравнении (5), входящий в выражение для “k”. Найти значение “n” позволяет граничное условие, записанное для уравнения (1) в арифметческой форме при x=0, $q = ny_0 = \sigma_c$, где σ_c - адгезионная прочность связи соединительной ткани мясного сырья с поверхностью реберной кости.

Таким образом, имеем следующее соотношение для определения коэффициента “n”:

$$n = \frac{\sigma_c}{y_0}; \tag{19}$$

$$k^4 = \frac{\sigma_c}{4EI};\ y_0 = \frac{\sigma_c}{4EIk^4}. \tag{20}$$

Подставляя уравнение (20) в (13) и приводя к арифметическому виду, получаем:

$$\frac{\sigma_c}{4EIk^4} = \frac{N}{8EIk^3}\frac{Y_1(\frac{kl}{2})}{Y_2(\frac{kl}{2})Y_1(\frac{kl}{2}) + 4Y_3(\frac{kl}{2})Y_4(\frac{kl}{2})}.$$

Откуда находим выражение для “k”

$$k = \frac{2\sigma_c[Y_2(\frac{kl}{2})Y_1(\frac{kl}{2}) + 4Y_3(\frac{kl}{2})Y_4(\frac{kl}{2})]}{NY_1(\frac{kl}{2})}. \tag{21}$$

Уравнение (21) является трансцендентным относительно “k”. Решая его методом итераций, определяем величину “k”.

Далее, в соответствии с принятым обозначением для уравнения (5), находим искомое значение “n”:

$$n = 4EIk^4.$$

Проведем численную оценку полученных результатов.

Для реальных значений $N = 50\ H$, $\sigma_c = 100 H/M$, из уравнения (21) находим величину $k = 4{,}7\ м^{-1}$ для материала кости $E = 10^{10}\ Па$.

Для поперечного сечения кости эллиптической формы имеем:

$$I = \frac{\pi ab^3}{64},$$

где a, b – большая и малая полуоси эллипса.

Статистические исследования размерных характеристик определенного вида реберных костей дают величины:

$$a = 0{,}0146\ м,\ b = 0{,}0035\ м.$$

В этом случае получаем:

$$I \approx 30{,}7 \cdot 10^{-12}$$

$$n = 600$$

$$q = 600y$$

Величина N_0 запишется:

$$N_0 = \frac{10}{51[Y_1(\frac{kl}{2})Y_2(\frac{kl}{2}) + 4Y_3(\frac{kl}{2})Y_4(\frac{kl}{2})]}. \qquad (23)$$

Пользуясь значениями тригонометрических и гиперболических функций, в соответствии с выражениями $Y_n(kx)$ таблицы 1, найдем при $l = 0{,}4\ м$:

$$Y_1(\frac{kl}{2}) = 0{,}870\,; Y_2(\frac{kl}{2}) = 0{,}916\,;$$

$$Y_3(\frac{kl}{2}) = 0{,}438\,; Y_4(\frac{kl}{2}) = 0{,}138\,.$$

Уравнения 15-19 примут следующий вид:

$$N_0 = 3{,}78 \cdot 10^{-3} N \qquad (24)$$

Для N = 50 H имеем $N_0 = 0{,}189$:

$$y = 0{,}189[0{,}870Y_1(kx) + 0{,}552Y_2(kx)]. \qquad (25)$$

Угол поворота сечения θ:

$$\theta = y' = 3{,}553[0{,}870Y_4(kx) - 0{,}138Y_1(kx)]; \qquad (26)$$

$$M = EIy'' = 5{,}1[0{,}870Y_3(kx) + 0{,}552Y_4(kx)]. \qquad (27)$$

Пользуясь полученными соотношениями представляется возможным рассчитать кривизну y'' опорной цилиндрической поверхности установки для обвалки реберного мяса, а так же величину “y” хода элементов привода для перемещения краевых сечений установочной пластины.

В частности:

$$y_{max} = y_0 = y(0) = 0.167\ м$$

$$M_{max} = M(\frac{l}{2}) = 2.343\ H \cdot м$$

$$R = 0.128\ м$$

$$\rho = \frac{1}{R} = 7.813\ м^{-1}$$

Список литературы

1. Ю.Н. Работнов. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979.744 с.
2. В.И. Феодосьев. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1967. 376 с.