

Возможности расчета нагнетателя комбинированных начинок с использованием рыбных фаршей

В.А.Арет, Е.И.Верболоз

Полученные авторами данные по исследованию структурно-механических характеристик комбинированных рыбо-крупяных и рыбо-овощных масс, которые могут использоваться в качестве начинок, позволяют рекомендовать следующую методику расчета шнекового нагнетателя для соответствующих дозаторов.

Представлено подробное стандартное аналитическое решение дифференциального уравнения математической физики в частных производных с использованием тригонометрических рядов применительно к шнековым прессам-дозаторам. Решение этой задачи имеет в первую очередь учебно-методическое значение и показывает, почему при некоторых изменениях краевых условий требуется использование численных методов.

Упрощенная теория червячных нагнетателей использует модель движения пищевой среды между параллельными пластинами. Предполагается, что среда обладает линейной вязкостью, несжимаема, процесс перемещения среды изотермический и ламинарный. Канал шнекового питателя в этом случае представляют в виде горизонтального цилиндра прямоугольного в сечении с одной подвижной стенкой, при этом используется принцип обращенного относительного движения шнека и шнекового канала в соответствии с приведенной на рисунке схемой.

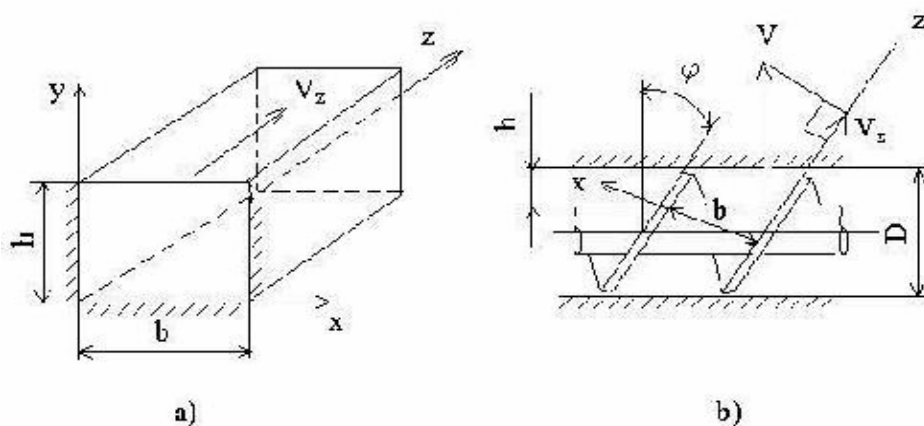


Рис. Расчетная схема шнекового нагнетателя

Полагаем также, что внешний диаметр шнека и внутренний диаметр шнекового цилиндра совпадают, т.е. отсутствует зазор, в котором может быть обратный поток материала. Поток в этом зазоре можно учесть отдельно.

Тогда скорость верхней пластины в прямоугольном канале

$$V_z = \frac{\pi D n}{60} \cos \varphi,$$

где V_z — проекция скорости точек шнека при $y=h$ на ось z ;
 n — угловая скорость шнека в оборотах в минуту;
 D — внешний диаметр шнека;
 φ — угол подъема винтовой линии шнека.

Уравнение движения в проекциях на ось z имеет вид:

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial z} + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \rho g_z \quad (1)$$

Реологические уравнения ньютоновской жидкости в прямоугольных координатах для этого случая (учитывая, что χ - коэффициент объемной вязкости равен 0) имеют вид:

$$\tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \quad (2)$$

$$\tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \quad (3)$$

$$\tau_{zz} = \mu \left[\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right] \quad (4)$$

где $\tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{zz}$ - компоненты тензора касательных напряжений (девиатора тензора напряжений).

Подставим выражения (2)-(4) в уравнение (1) и учтем следующие упрощения:

- в силу стационарности потока $\frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$;
- в плоскопараллельной модели канала $v_x = v_y = 0$;
- геометрия канала по оси z не меняется, откуда $\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$;
- жидкость несжимаема, откуда $\chi = 0; \rho = const.$;
- канал горизонтальный, откуда $g_z = 0$.

С учетом названных упрощений дифференциальное уравнение движения для теории червячных нагнетателей будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) \quad (5)$$

Пусть для неглубоких и широких каналов скорость течения мало зависит от координаты x . Тогда уравнение (5) еще больше упростится и приведет к краевой задаче вида:

$$\frac{d^2 v_z}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right); v_z(0) = 0; v_z(h) = V_z \quad (6)$$

При решении этой краевой задачи получим выражение для распределения скоростей течения среды в винтовом канале, как функцию координаты y :

$$v_z(y) = y \left(\frac{V_z}{h} \right) - \frac{yh - y^2}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) \quad (7)$$

Интегрированием получим формулу для построения расходно-напорной характеристики червячного нагнетателя:

$$Q = b \int_0^h v_z(y) dy = \frac{V_z b h}{2} - \frac{b h^3}{12\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) \quad (8)$$

Разумеется, при выводе формул (7) и (8) были сделаны существенные упрощения, но основные закономерности червячных нагнетателей в пищевой промышленности эти зависимости вполне удовлетворительно описывают, особенно, если вместо коэффициента динамической вязкости модели ньютоновской жидкости использовать коэффициент эффективной вязкости для неньютоновской пищевой среды при определенной эффективной скорости сдвига.

Для уточненной теории шнековых нагнетателей с глубокими каналами следует учесть тормозящее действие боковых стенок шнекового канала и в краевой задаче вместо дифференциального уравнения (6) использовать уравнение (5). Тогда математически задача решения краевой задачи с дифференциальным уравнением в частных производных сводится к известной задаче Буссинеска.

Для построения уточненной теории червячных нагнетателей нужно ставить следующую краевую задачу, подобную рассмотренной в линейной теории:

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right); v_z(0, y) = 0; v_z(x, 0) = 0; v_z(b, y) = 0; \quad (9)$$

$$v_z(x, h) = V_z.$$

Задачу (6) тогда преобразуем следующим образом:

$$v_z(x, y) = v_{z1}(x, y) + v_{z2}(x, y); \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 v_{z1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{z1}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_{z2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{z2}}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 v_{z1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{z1}}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 v_{z2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{z2}}{\partial y^2} = 0 \quad (13)$$

$$v_{z1}(0, y) = v_{z1}(x, 0) = v_{z1}(b, y) = v_{z1}(x, h) = 0 \quad (14)$$

$$v_{z2}(0, y) = v_{z2}(x, 0) = v_{z2}(b, y) = 0; v_{z2}(x, h) = V_z \quad (15)$$

Физический смысл расщепления основной задачи на две задачи заключается в том, что первая задача определяет скорости частиц жидкости в канале с неподвижными стенками, вызванная перепадом давления P , а вторая – скорости вызванная движением верхней стенки канала при отсутствии перепада давления. Рассмотрим решение второй задачи, поскольку первая уже решалась, при изучении течения жидкости в цилиндрическом канале прямоугольного сечения.

Пусть $v_{z2}(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$,

Тогда из уравнения (14) получим

$$Y(y) \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + X(x) \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = 0 \quad (16)$$

Поскольку (16) должно быть удовлетворено при любых x и y , то можно записать следующее тождество:

$$\left[\frac{d^2 X(x)}{dx^2} \right] / X(x) \equiv - \left[\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} \right] / Y(y) = -\kappa \quad (17)$$

где κ – некоторая константа, $\kappa > 0$.

Из выражения (17) получим два однородных линейных дифференциальных уравнения в обычных производных:

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \kappa X(x) = 0 \quad (18)$$

$$\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} - \kappa Y(y) = 0 \quad (19)$$

Для уравнения (19) из краевых условий (15) получим краевые условия:

$$v_{z_2}(0, y) = 0, X(0) = 0; v_{z_2}(b, y) = 0, X(b) = 0. \quad (20)$$

Отбросив тривиальное решение уравнения (20):

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} = X(x) = 0, \quad (21)$$

найдем решение уравнения (18) в виде экспоненциальной функции

$$X(x) = e^{\lambda x}; \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \lambda^2 e^{\lambda x}. \quad (22)$$

Далее находим характеристическое уравнение, имеющее комплексные корни и с помощью уравнений Эйлера перейдем к обычным тригонометрическим функциям:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + \kappa e^{\lambda x} = 0; e^{\lambda x} \neq 0; \lambda^2 + \kappa = 0; \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\kappa} \cdot i; i = \sqrt{-1}; \quad (23)$$

$$X = C_1 e^{\sqrt{\kappa}ix} + C_2 e^{-\sqrt{\kappa}ix}; C_1 = \frac{A}{2} + \frac{B}{2i}; C_2 = \frac{A}{2} - \frac{B}{2i}; \quad (24)$$

где C_1, C_2, A, B – константы интегрирования.

$$X = A \left(\frac{e^{\sqrt{\kappa}ix} + e^{-\sqrt{\kappa}ix}}{2} \right) + B \left(\frac{e^{\sqrt{\kappa}ix} - e^{-\sqrt{\kappa}ix}}{2i} \right). \quad (25)$$

По уравнения Эйлера получим

$$X = A \cos \sqrt{\kappa}x + B \sin \sqrt{\kappa}x \quad (26)$$

Теперь с помощью краевых условий (20) можно найти тривиальное решение $A=0, B=0$ и нетривиальное решение $A=0; B \sin \sqrt{\kappa}b = 0$.

В нетривиальном решении последнее выражение можно удовлетворить следующим образом:

$$\sin \sqrt{\kappa}b = 0; \sqrt{\kappa}b = n\pi; n = 1, 2, 3... \quad (27)$$

$$\text{Тогда } \kappa_n = \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2; X_n(x) = B \sin \frac{n\pi}{b} x. \quad (28)$$

Дифференциальное уравнение (19) превращается в систему дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{d^2 Y_n(y)}{dy^2} - \kappa_n Y_n(y) = 0 \quad (29)$$

или

$$\frac{d^2 Y_n(y)}{dy^2} - \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 Y_n(y) = 0 \quad (30)$$

минус решение по формулам Эйлера представляется в гиперболических синусах и косинусах:

$$Y_n(y) = D_n ch \frac{n\pi y}{b} + E_n sh \frac{n\pi y}{b} \quad (31)$$

С учетом ранее записанных выражений получим

$$v_{z2n} = X_n(x)Y_n(y) = \sin \frac{n\pi x}{b} \left(D_n ch \frac{n\pi y}{b} + E_n sh \frac{n\pi y}{b} \right) \quad (32)$$

Согласно теории линейных дифференциальных уравнений, общее решение будет суммой частных решений:

$$v_{z2}(x, y) = \sum_{n=1,2,3}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{b} \left(D_n ch \frac{n\pi y}{b} + E_n sh \frac{n\pi y}{b} \right) \quad (33)$$

Будем находить константы интегрирования по краевым условиям:

$$v_{z2}(x, 0) = 0; y = 0; ch \frac{n\pi y}{b} \Big|_{y=0} = 1; sh \frac{n\pi y}{b} \Big|_{y=0} = 0 \quad (34)$$

Запишем формулу (33) с учетом условия (34):

$$0 = \sum_{n=1,2,3}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{b} \quad (35)$$

Используем далее теорию рядов Фурье:

$$D_n = \frac{2}{b} \int_0^b v_{z2}(x, 0) \sin \frac{n\pi x}{b} dx \quad (36)$$

Поскольку $v_{z2}(x, 0) = 0$, то $D_n = 0$. (37)

Краевое условие для скоростей на верхней стенке канала, предполагая, что, как и ранее, условие прилипаемости среды к материалу корпуса, имеет вид

$$v_{z2}(x, h) = V_z \quad (38)$$

Тогда выражение (34) можно записать так

$$V_z = \sum_{n=1,2,3}^{\infty} E_n sh \frac{n\pi h}{b} \sin \frac{n\pi x}{b} \quad (39)$$

Пользуясь разложением в ряд Фурье, запишем

$$\alpha_n = E_n sh \frac{n\pi h}{b} \quad (40)$$

и

$$E_n sh \frac{n\pi h}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b V_z \sin \frac{n\pi x}{b} dx \quad (41)$$

Проведя интегрирование в правой части уравнения (39), выразим

$$E_n = \frac{2V_z}{n\pi} \frac{1 - \cos n\pi}{sh \frac{n\pi h}{b}} \quad (42)$$

Поскольку четные значения $n=2,4,6\dots$ дают тривиальное решение $E_n = 0$, то будем учитывать только нечетные слагаемые $n=1,3,5\dots$, при которых числитель в правой части формулы (42) равен 2. Теперь распределение скоростей течения в канале определяется формулой вида:

$$v_{z2}(x, y) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{b} \left(\frac{2V_z}{n\pi} \right) \frac{1 - \cos n\pi}{sh \frac{n\pi h}{b}} sh \frac{n\pi y}{b} \quad (43)$$

или

$$v_{z2}(x, y) = \frac{4V_z}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{b} \frac{sh \frac{n\pi y}{b}}{sh \frac{n\pi h}{b}} \quad (44)$$

Двойным интегрирование получим расход среды, обусловленный движением верхней стенки канала червячного нагнетателя.

Заметим, что множитель перед скобками в выражении (43) совпадает с первым слагаемым в формуле расхода среды в упрощенной линейной теории червячных нагнетателей:

$$Q = \frac{V_z b h}{2} - \frac{b h^3}{12\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)$$

Следовательно, выражение в квадратных скобках в последнем выражении формулы (43) можно рассматривать как поправочный коэффициент, зависящий от отношения ширины канала b к ее глубине h и учитывающий тормозящее действие боковых неподвижных стенок глубоких червячных каналов. По этому поправочному коэффициенту можно расчетным путем оценить погрешность первого слагаемого в формуле расхода упрощенной линейной теории червячных нагнетателей и определить применимость упрощенной теории в расчетах.

$$\begin{aligned}
Q_2 &= \frac{4V_z}{\pi} \int_0^b \int_0^h \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{b} \frac{sh \frac{n\pi y}{b}}{sh \frac{n\pi h}{b}} dx dy = \\
&= \frac{4V_z}{\pi} \int_0^b \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{b} \left(\int_0^h \frac{sh \frac{n\pi y}{b}}{sh \frac{n\pi h}{b}} dy \right) dx = \\
&= \frac{4V_z}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n} \left(-\frac{b}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{b} \Big|_0^b \right) \frac{b}{n\pi sh \frac{n\pi h}{b}} \left(ch \frac{n\pi h}{b} \Big|_0^h \right) = \\
&= \frac{4V_z}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{2b^2}{n^3 \pi^2} \cdot \frac{1}{sh \frac{n\pi h}{b}} \left(ch \frac{n\pi h}{b} - 1 \right) = \\
&= \frac{V_z b h}{2} \left[\frac{16b}{\pi^3 h} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^3} \cdot th \left(\frac{n\pi h}{b} \right) \right] \tag{45}
\end{aligned}$$

Проведенные выкладки свидетельствуют о возможности расчета дозаторов комбинированных начинок из рыбного фарша с использованием упрощенной теории червячных нагнетателей при дополнительной оценке вносимых погрешностей.