

УДК 664.9.022

Математическое моделирование силы трения ножа при резании пищевого материала

Канд. техн. наук **О.В. Агеев**, oleg.ageev@klgtu.ru
 д-р техн. наук **В.А. Наумов**, vladimir.naumov@klgtu.ru
 д-р техн. наук **Ю.А. Фатыхов**, yuriy.fatyhov@klgtu.ru
*Калининградский государственный технический университет
 236022, Россия, Калининград, Советский пр., д.1*

Теоретически исследован процесс трения при резании пищевых материалов. Мышечная ткань сырья описана реологической моделью Максвелла–Томсона. Для выбора аналитического описания регулярного микро рельефа ножей пищевого оборудования с учетом технологических формообразующих факторов использована физико-технологическая теория неровностей поверхности. Приведено математическое описание профиля шероховатой поверхности ножа в виде периодической функции, содержащей две гармоники. Путем решения дифференциального уравнения состояния вязкоупругого материала получен закон распределения контактного давления над микровыступами шероховатой поверхности грани. Определены выражения для размерной и безразмерной деформационных сил трения. Установлено, что при скоростях обработки, стремящихся к нулю или бесконечности, указанная сила стремится к нулю. Величина безразмерной силы монотонно возрастает с ростом меры эластичности материала и увеличением безразмерной длины грани ножа. Безразмерная ширина контактной площадки микронеровностей монотонно зависит от меры эластичности материала и немонотонно зависит от безразмерной скорости скольжения с явно выраженными минимальным и предельным значениями. При значениях меры эластичности 5, безразмерной скорости 0,001; 0,03; 0,12 максимальная амплитуда контактного давления составляет 1,0; 1,391; 2,750 соответственно. При значениях меры эластичности 2; 4; 7; 12 минимальные значения безразмерной ширины контактной площадки составляют 0,683; 0,641; 0,612; 0,588, предельное значение составляет 0,684. При значениях меры эластичности 5; безразмерной длины грани 10; 20; 30; 50 значения максимума безразмерной деформационной силы трения составляют соответственно 21,728; 43,360; 64,993; 108,258. При значениях безразмерной длины грани 20; меры эластичности 2; 5; 8; 12 значения максимума силы составляют соответственно 17,344; 43,360; 69,376; 104,064.

Ключевые слова: предварительная обработка сырья; резание пищевого материала; математическое моделирование; сила трения; шероховатость ножа; реология; вязкоупругость.

DOI: 10.17586/2310-1164-2019-12-4-3-17

Mathematical simulation of knife friction force during food cutting

Ph.D. **Oleg V. Ageev**, oleg.ageev@klgtu.ru
 D.Sc. **Vladimir A. Naumov**, vladimir.naumov@klgtu.ru
 D.Sc. **Yuri A. Fatykhov**, yuriy.fatyhov@klgtu.ru
*Kaliningrad State Technical University
 1, Sovietsky ave., Kaliningrad, 236022, Russia*

The process of friction when cutting food materials has been investigated theoretically. The muscle tissue of the raw material has been described by the Maxwell–Thomson rheological model. For choosing an analytical description of a regular microrelief of food processing equipment knives, taking into account technological formative factors, a physical-technological theory of surface roughness has been used. A mathematical description of the knife profile rough surface in the form of a periodic function with two harmonics has been considered. By solving the differential equation of viscoelastic material state, the law of distribution of contact pressure over the microprotrusions of the edge rough surface has been obtained. An expressions for dimension and dimensionless deformation friction forces has been obtained. It is established that at speeds tending to zero or infinity, this force tends to zero. The value of the dimensionless force increases monotonically with the increase in the measure of the material elasticity and the increase in the dimensionless length of the knife edge. The dimensionless width of the contact area of the irregularities monotonously depends on the measure of material elasticity and non-monotonously depends on the dimensionless sliding speed with a pronounced minimum. When the values of the elasticity measure is 5, and the dimensionless velocity is 0.001; 0.03; and 0.12, maximum

contact pressure amplitude is 1.0; 1.391; and 2.750 respectively. With the values of elasticity measure of 2; 4; 7; and 12, minimum values of the dimensionless width of the contact pad are 0.683; 0.641; 0.612; and 0.588, the limit value is 0.684. With the values of the elasticity measure is 5; and dimensionless edge length is 10; 20; 30; and 50, the maximum values of the dimensionless deformation friction force are 21.728; 43.360; 64.993; and 108.258 respectively. When values of dimensionless edge length is 20; elasticity measure is 2; 5; 8; and 12, the values of the maximum force are 17.344; 43.360; 69.376; and 104.064 respectively.

Keywords: pretreatment of raw materials; food cutting; math modeling; friction force; knife roughness; rheology; viscoelasticity.

Введение

Обеспечение ресурсосбережения при резании пищевых продуктов предусматривает тщательный анализ сил сопротивления. Снижение силы вредного сопротивления предполагает минимизацию одной из ее составляющих – деформационной силы трения.

Сила трения пищевого материала и поверхности ножа является следствием шероховатости граней, которая определяется параметрами технологической обработки рабочего органа [1]. Прогрессивная технология производства ножей пищевого оборудования предусматривает следующие основные виды операций: обработка резанием (чистовое точение) и обработка шлифованием, в результате чего профиль поверхности включает случайную и систематическую составляющие.

Моделирование процесса трения пищевых материалов и поверхности рабочих органов является актуальным направлением исследований в России и за рубежом. В работе [2] создана научная основа для оптимизации режущей кромки ножей, предназначенных для измельчения охлажденного и дефростированного мясного сырья. В статье [3] проанализирован процесс скользящего резания и установлен его дискретный характер. Кроме того, предложен подход к аналитическому описанию продольного профиля шероховатой режущей кромки в виде случайного стационарного нормального процесса, обладающего свойством эргодичности. В исследовании [4] установлены решающие особенности резания пищевых продуктов лезвийным инструментом. В работе [5] установлена экспериментальная зависимость между силой сопротивления волокнистого материала и скоростью движения ножа. В статье [6] проанализировано влияние угла заточки лезвия на параметры указанного процесса. В работе [7] исследовано влияние трения и глубины погружения лезвия на силы сопротивлений при резании вязкоупругих материалов. В статье [8] выполнен теоретико-экспериментальный анализ взаимодействия высокоэластичных сред в процессе трения и износа. В работе [9] рассмотрены закономерности трения при резании пищевых материалов в различных диапазонах скоростей. Статьи [10, 11] описывают численное моделирование трибологических явлений на поверхности раздела эластичных и жестких тел. Статья [12] описывает конечно-элементное моделирование процесса трения вязкоупругого продукта. В работах [13, 14] исследованы закономерности трения различных материалов при изменении режима скольжения. Математическое моделирование процесса скольжения штампа произвольной формы по вязкоупругому основанию проведено в работах [15, 16]. Научные основы теории контактных явлений и процесса трения приводятся в работе [17].

Однако, несмотря на ценность известных публикаций, в настоящее время недостаточно разработано аналитическое описание сил трения, действующих на рабочий орган при резании вязкоупругих пищевых материалов. В то же время для оптимизации геометрии ножа по критерию минимального сопротивления резанию требуется математическое моделирование сил, действующих на его грани с учетом шероховатости поверхности.

Настоящая статья открывает цикл работ, посвященный аналитическому исследованию деформационных сил трения, действующих между шероховатой поверхностью режущих органов и материалом при резании пищевых продуктов. В рамках построения научной теории резания вязкоупругих тканей представляется целесообразным провести математическое моделирование трибологического взаимодействия граней ножа и продукта при различных видах шероховатости. Наряду с этим, представляет интерес уточнение влияния параметров формы микровыступов на величину силы трения, а также выявление зависимостей деформационной составляющей коэффициента трения от геометрии ножа, реологических свойств продукта и скорости резания. На решение данных задач и направлено проводимое исследование, в котором рассматривается деформационная составляющая силы трения периодического микрорельефа граней ножа, содержащего две гармоники.

Материал

Выбор реологических моделей пищевых продуктов животного происхождения выполнен по результатам работ [18, 19]. Определены дифференциальные уравнения моделей с их решениями для различных условий нагружения материала. Мышечная ткань ряда продуктов с вязкоупругими свойствами до разрушения проявляет ограниченное течение под нагрузкой, релаксирует при постоянной нагрузке до равновесного состояния, полностью восстанавливается при полной разгрузке. В этом случае механическому поведению материала приближенно соответствует трехэлементная реологическая модель Максвелла–Томсона (стандартное вязкоупругое тело).

Методы

При выборе аналитического описания регулярного микрорельефа рабочих органов пищевого оборудования с учетом технологических формообразующих факторов использована физико-технологическая теория неровностей поверхности [1]. Действие формообразующих факторов при чистовом точении имеет периодический или практически периодический характер, что обусловлено подачей инструмента, оборотами заготовки, самозатачиванием абразивного инструмента и другими условиями. Если считать случайную составляющую малой, то основа микрорельефа поверхности грани ножа приближенно описывается тригонометрическим полиномом вида

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^p \left\{ a_n \cdot \cos \left(\frac{2\pi \cdot n \cdot x}{S_0} + \bar{\psi}_n \right) \right\}, \tag{1}$$

где S_0 – шаг профиля (шаг первой гармоники);

p – порядок многочлена (число гармоник);

$a_n, \bar{\psi}_n$ – коэффициент Фурье и фазовый угол n -й компоненты профиля;

$a_0/2$ – нулевой член разложения для кривой профиля (координата средней линии профиля в такой системе координат, в которой ордината параллельна средней линии профиля).

В последующих исследованиях из цикла работ рассмотрены периодические формы шероховатости с числом гармоник до $p = 16$, в результате чего на основе численных методов выявлена зависимость деформационной силы трения от указанного параметра микровыступа. Далее используем три члена разложения при описании формы микрорельефа, включая нулевой член.

Обозначим $a_0 = A$; $a_1 = 0,5 \cdot A$. Модель периодического профиля поверхности, содержащую две гармоники ($p = 2$), выразим из (1) в следующем виде

$$f_2(x) = \frac{1}{2} \cdot a_0 + a_1 \cdot \cos \left(\frac{2\pi \cdot x}{S_0} + \bar{\psi}_1 \right) + a_2 \cdot \cos \left(\frac{4\pi \cdot x}{S_0} + \bar{\psi} \right). \tag{2}$$

Преобразуем выражение (2) к следующему виду

$$f_2(x) = A \cdot \left\{ \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot \cos \left(\frac{2\pi \cdot x}{S_0} + \bar{\psi} \right) + \frac{1}{8} \cdot \cos \left(\frac{4\pi \cdot x}{S_0} + \bar{\psi} \right) \right\}; a_0 = \frac{3A}{4}; a_1 = \frac{A}{2}; a_2 = \frac{A}{8}. \tag{3}$$

Из (3) получим выражения, описывающие периодический профиль шероховатой поверхности ножа, содержащий две гармоники

$$f_2(x) = A \cdot \cos^4 \left(\frac{\pi \cdot x}{S_0} + \bar{\psi} \right); \bar{f}_2(\bar{x}) = \cos^4(\pi \cdot \bar{x} + \bar{\psi}). \tag{4}$$

Модель $f_2(x)$ (4) и ее приведенная величина $\bar{f}_2(\bar{x})$ приближенно описывают форму периодического технологического микрорельефа поверхности ножа, сформированного чистовым ротационным точением, а также последовательным шлифованием мелкозернистым абразивом и полированием.

Математическое моделирование деформационной силы трения

Вследствие сжатия элементарного волокна мышечной ткани dx в точке a микровыступа действует контактное усилие $\vec{\sigma}$, обусловленное внутренним напряжением в волокне dx (рисунок 1). Вектор $\vec{\sigma}$ в некоторой точке a направлен по нормали к касательной, проведенной в указанной точке a к микрорельефу $f(x)$. Контактное усилие $\vec{\sigma}$ состоит из нормальной \vec{p} к направлению скольжения

микровыступа и тангенциальной \vec{q} (параллельной направлению скольжения) составляющих $\vec{\sigma} = \vec{p} + \vec{q}$. Нормальная составляющая \vec{p} является проекцией вектора $\vec{\sigma}$ на нормаль к направлению скольжения, а тангенциальная \vec{q} – проекцией вектора $\vec{\sigma}$ на указанное направление.

Нормальная составляющая \vec{p} является контактным давлением элементарного волокна dx в точке a микровыступа. Тангенциальная составляющая \vec{q} является встречным сопротивлением материала движению точки a микровыступа. На микровыступе при определенной скорости скольжения существует крайняя точка контакта c , имеющая координату x_c , в которой материал полностью разгружается ($\vec{p} = 0$). В связи с запаздыванием восстановительной деформации контакт материала со следующим микровыступом возникает не в точке $d(x_d = S_0; f(x_d) = 0)$, а в некоторой точке контакта c' , имеющей координату $x_{c'}$. На участке cc' контакт материала и микронеровности отсутствуют и контактное давление равно нулю. Несимметричность площадки контакта $0abc$ и несимметричность распределения контактных давлений обуславливают возникновение деформационной силы трения. Равновесие микровыступа по оси Oy обусловлено симметричной геометрией ножа при наличии двухгранной заточки.

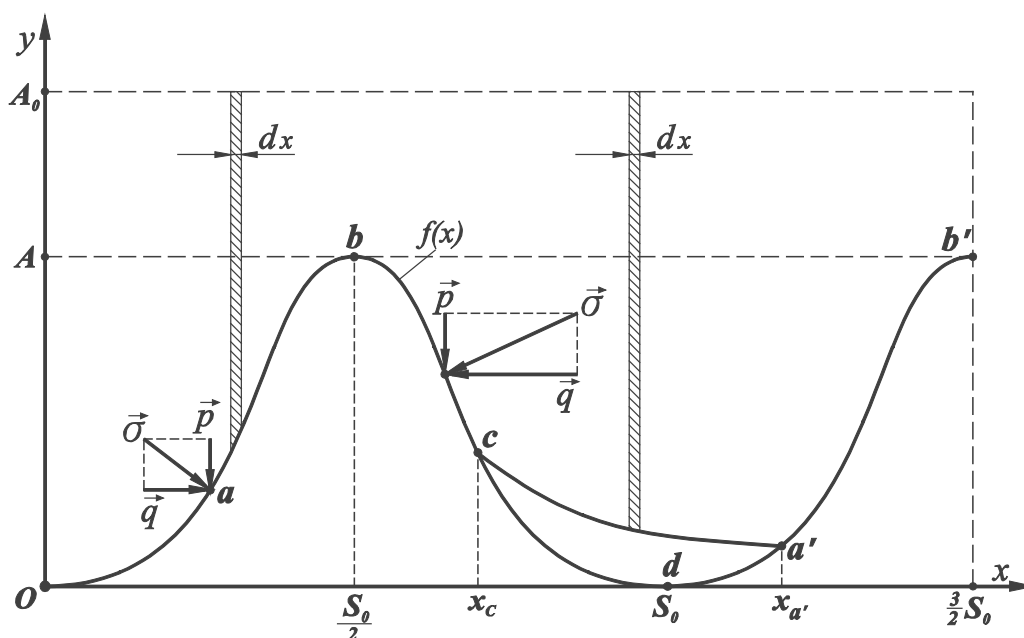


Рисунок 1 – Схема скольжения микровыступа грани ножа по мышечной ткани (S_0 – подача резца)

Figure 1. The scheme of sliding the microprotrusion of the knife edge along the muscle tissue (S_0 – cutter feed)

Определим в квазистатической постановке контактное давление p на микровыступ поверхности ножа, обусловленное напряжением в деформированном элементарном волокне dx с целью нахождения деформационной силы трения F_f . Из рисунка 1 видим, что относительная деформация сжатия элементарного волокна dx при скольжении микровыступа, внедренного в материал на глубину A , на участке $0ab$ изменяется от нуля до A/A_0 , а на участке неровности bcd – от A/A_0 до нуля. На участке cd контакт микровыступа с материалом отсутствует.

Увеличение относительной деформации сжатия в процессе раздвижения материала микровыступом приводит к росту внутренних напряжений в элементарных волокнах. Следовательно, для нахождения контактного давления со стороны элементарного волокна на точку микровыступа необходимо определить внутреннее напряжение в сжимаемом вязкоупругом волокне при увеличении его относительной деформации с заданной скоростью. Заметим, что при установившемся движении микровыступа с постоянной скоростью u изменение деформации элементарного волокна dx по оси Oy происходит с переменной скоростью раздвижения материала, что обусловлено геометрией неровности. В системе координат Oxy (рисунок 1) зададим для модели (4) фазовый угол $\bar{\psi} = \pi/2$. Тогда при сжатии

материала микровыступом относительная деформация элементарного волокна ε_x и скорость ее изменения $d\varepsilon_x/dx$ по оси Ox зависят от координаты x волокна, времени t с момента начала деформирования волокна, скорости движения шероховатой поверхности ножа в материале u , высоты слоя A_0 деформируемого материала следующим образом

$$\varepsilon_{x_2} = \frac{f_2(x)}{A_0} = \frac{A}{A_0} \cdot \cos^4\left(\frac{\pi \cdot x}{S_0} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{A}{A_0} \cdot \sin^4\left(\frac{\pi \cdot x}{S_0}\right) = \frac{A}{A_0} \cdot \sin^4\left(\frac{\pi \cdot u \cdot t}{S_0}\right); \quad (5)$$

$$\frac{d\varepsilon_{x_2}}{dx} = \frac{f_2'(x)}{A_0} = 4 \cdot \pi \cdot \frac{A}{A_0 \cdot S_0} \cdot \sin^3\left(\frac{\pi \cdot x}{S_0}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{S_0}\right); \quad (6)$$

Введем следующие обозначения:

E_0 – мгновенный модуль упругости мышечной ткани (модуль Юнга);

E_1 – запаздывающий (высокоэластичный) модуль упругости материала;

η – коэффициент динамической вязкости мышечной ткани;

$e_{01} = E_0/E_1$ – мера эластичности материала;

l_k – длина кромки лезвия;

u – скорость скольжения материала по шероховатой поверхности ножа;

$\xi = \frac{E_0 \cdot E_1}{E_0 + E_1} = \frac{E_0}{1 + E_0/E_1}$ – длительный модуль упругости;

$k = -\frac{E_0 + E_1}{\eta \cdot u}$; $\mathcal{G} = \frac{2 \cdot \pi^2 \cdot E_0}{\xi \cdot k} = \frac{2 \cdot \pi^2}{k} \cdot (e_{01} + 1)$.

$p_8(x)$ – контактное давление материала на микровыступ, форма которого соответствует модели (4).

Дифференциальное уравнение состояния материала [20] с учетом $dx = u \cdot dt$ запишем в следующем виде

$$\frac{dp}{dx} \cdot u + p \cdot \frac{E_0 + E_1}{\eta} = \frac{d\varepsilon_x}{dx} \cdot u \cdot E_0 + \varepsilon_x \cdot \frac{E_0 \cdot E_1}{\eta}. \quad (7)$$

Для модели (4) с учетом (5), (6) дифференциальное уравнение (7) примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{dp_8(x)}{dx} \cdot u + p_8(x) \cdot \frac{E_0 + E_1}{\eta} = \\ & = \frac{4 \cdot \pi \cdot A \cdot u \cdot E_0}{A_0 \cdot S_0} \cdot \sin^3\left(\frac{\pi \cdot x}{S_0}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{S_0}\right) + \frac{A \cdot E_0 \cdot E_1}{A_0 \cdot \eta} \cdot \sin^4\left(\frac{\pi \cdot x}{S_0}\right). \end{aligned} \quad (8)$$

Решение дифференциального уравнения (8) с учетом начального условия $x = 0$; $p(x) = 0$ выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} p_8(x) = \frac{A \cdot \xi \cdot k}{A_0} \cdot & \left\{ \frac{0,5 \cdot \pi \cdot e_{01} \cdot S_0 \cdot \sin\left(\frac{4\pi \cdot x}{S_0}\right) + (\mathcal{G} + 0,125 \cdot k \cdot S_0^2) \cdot \cos\left(\frac{4\pi \cdot x}{S_0}\right)}{16\pi^2 + k^2 \cdot S_0^2} - \right. \\ & \frac{\pi \cdot e_{01} \cdot S_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot x}{S_0}\right) + (\mathcal{G} + 0,5 \cdot k \cdot S_0^2) \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot x}{S_0}\right)}{4\pi^2 + k^2 \cdot S_0^2} + \frac{0,375}{k} + \\ & \left. + \left[\frac{\mathcal{G} + 0,5 \cdot k \cdot S_0^2}{4\pi^2 + k^2 \cdot S_0^2} - \frac{\mathcal{G} + 0,125 \cdot k \cdot S_0^2}{16\pi^2 + k^2 \cdot S_0^2} - \frac{0,375}{k} \right] \cdot \exp(k \cdot x) \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Выражение (9) описывает закон распределения давления на контактной площадке в соответствии с моделью шероховатости (4). На основе энергетического подхода [15, 16] деформационная сила трения определяется следующим выражением

$$\begin{aligned} \hat{F}_2 &= \int_0^{x_1} \int_0^{l_k} (f_2'(x) \cdot p_8(x)) dz dx + \int_{x_2}^{x_3} \int_0^{l_k} (f_2'(x) \cdot p_8(x)) dz dx + \int_{x_4}^{x_5} \int_0^{l_k} (f_2'(x) \cdot p_8(x)) dz dx + \\ &+ \dots + \int_{x_{n-4}}^{x_{n-3}} (f_2'(x) \cdot p_8(x)) dx + \int_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} \int_0^{l_k} (f_2'(x) \cdot p_8(x)) dz dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \int_0^{l_k} (f_2'(x) \cdot p_8(x)) dz dx = \\ &= l_k \cdot \sum_1^{0,5 \cdot n + 1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (f_2'(x) \cdot p_8(x)) dx, \end{aligned} \quad (10)$$

где $n = 0, 2, 4, 6, 8, \dots$;

$x_1, x_3, x_5, \dots, x_{n-3}, x_{n-1}, x_{n+1}$ – координата крайней точки контакта $(0,5 \cdot n + 1)$ -го микровыступа шероховатой поверхности ножа с материалом;

$x_0 = 0, x_2, x_4, \dots, x_{n-4}, x_{n-2}, x_n$ – координата начальной точки контакта указанного микровыступа; $(x_{n+1} - x_n)$ – длина контактной площадки $(0,5 \cdot n + 1)$ -го микровыступа.

Использование выражения (10) обеспечивает точное определение деформационной силы трения, однако, вычисление суммы определенных интегралов в указанном выражении по всей длине грани ножа представляет собой трудоемкий процесс. В связи с этим, целесообразно использовать приближенное определение деформационной силы трения, представив выражение (10) в виде одного интеграла по длине грани. Тогда на основе энергетического подхода [15, 16] деформационную силу трения материала по всей передней наклонной грани ножа длиной x_B рассчитаем согласно следующему выражению

$$\hat{F}_2 = l_k \cdot \int_0^{x_B} (f_2'(x) \cdot p_8(x)) dx. \quad (11)$$

Подставим в выражение (11) полученные выше выражения для формы микровыступа $f_2(x)$ и контактного давления $p_8(x)$

$$\begin{aligned} \hat{F}_2 &= l_k \cdot \int_0^{x_B} \left\{ \frac{4\pi \cdot A}{S_0} \cdot \sin^3 \left(\frac{\pi \cdot x}{S_0} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi \cdot x}{S_0} \right) \cdot p_8(x) \right\} dx = \\ &= \frac{4\pi \cdot A^2 \cdot \xi \cdot k \cdot l_k}{A_0 \cdot S_0} \cdot \int_0^{x_B} \left\{ \sin^3 \left(\frac{\pi \cdot x}{S_0} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi \cdot x}{S_0} \right) \times \right. \\ &\times \left[\frac{0,5 \cdot \pi \cdot e_{01} \cdot S_0 \cdot \sin \left(\frac{4\pi \cdot x}{S_0} \right) + (\vartheta + 0,125 \cdot k \cdot S_0^2) \cdot \cos \left(\frac{4\pi \cdot x}{S_0} \right)}{16\pi^2 + k^2 \cdot S_0^2} \right. \\ &- \frac{\pi \cdot e_{01} \cdot S_0 \cdot \sin \left(\frac{2\pi \cdot x}{S_0} \right) + (\vartheta + 0,5 \cdot k \cdot S_0^2) \cdot \cos \left(\frac{2\pi \cdot x}{S_0} \right)}{4\pi^2 + k^2 \cdot S_0^2} + \frac{0,375}{k} + \\ &\left. \left. + \left(\frac{\vartheta + 0,5 \cdot k \cdot S_0^2}{4\pi^2 + k^2 \cdot S_0^2} - \frac{\vartheta + 0,125 \cdot k \cdot S_0^2}{16\pi^2 + k^2 \cdot S_0^2} - \frac{0,375}{k} \right) \cdot \exp(k \cdot x) \right] \right\} dx. \end{aligned} \quad (12)$$

Введем следующие обозначения:

$$J_1 = (4\pi^2 + k^2 \cdot S_0^2)^{-1}; \quad J_2 = (16\pi^2 + k^2 \cdot S_0^2)^{-1}; \quad I_1 = \vartheta + 0,5 \cdot k \cdot S_0^2; \quad I_2 = \vartheta + 0,125 \cdot k \cdot S_0^2. \quad (13)$$

Используем формулу Ньютона–Лейбница и с учетом (13) получим из (12) выражение для деформационной силы трения

$$\begin{aligned}
 \hat{F}_2 &= \frac{A^2 \cdot \xi \cdot k \cdot l_k}{A_0} \times \\
 &\times \left\{ J_2 \cdot \left[\frac{\pi \cdot e_{01} \cdot S_0}{6} \cdot \sin^3 \left(\frac{2\pi \cdot x_B}{S_0} \right) + \frac{\pi \cdot e_{01} \cdot S_0}{64} \cdot \sin \left(\frac{8\pi \cdot x_B}{S_0} \right) - \frac{\pi^2 \cdot e_{01}}{8} \cdot x_B - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{I_2}{12} \cdot \left(\cos \left(\frac{6\pi \cdot x_B}{S_0} \right) - 3 \cdot \cos \left(\frac{2\pi \cdot x_B}{S_0} \right) \right) + \frac{I_2}{32} \cdot \cos \left(\frac{8\pi \cdot x_B}{S_0} \right) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + J_1 \cdot \left[\frac{\pi \cdot e_{01} \cdot S_0}{6} \cdot \sin^3 \left(\frac{2\pi \cdot x_B}{S_0} \right) + \frac{\pi \cdot e_{01}}{8} \cdot \left(S_0 \cdot \sin \left(\frac{4\pi \cdot x_B}{S_0} \right) - 4\pi \cdot x_B \right) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{I_1}{6} \cdot \cos^3 \left(\frac{2\pi \cdot x_B}{S_0} \right) + \frac{I_1}{8} \cdot \cos \left(\frac{4\pi \cdot x_B}{S_0} \right) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \pi \cdot \left(J_1 \cdot I_1 - J_2 \cdot I_2 - \frac{0,375}{k} \right) \cdot \exp(k \cdot x_B) \cdot \left[J_1 \cdot \left(k \cdot S_0 \cdot \sin \left(\frac{2\pi \cdot x_B}{S_0} \right) - 2\pi \cdot \cos \left(\frac{2\pi \cdot x_B}{S_0} \right) \right) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - J_2 \cdot \left(0,5 \cdot k \cdot S_0 \cdot \sin \left(\frac{4\pi \cdot x_B}{S_0} \right) - 2\pi \cdot \cos \left(\frac{4\pi \cdot x_B}{S_0} \right) \right) \right] + \frac{0,375}{k} \cdot \left[\frac{1}{8} \cdot \cos \left(\frac{4\pi \cdot x_B}{S_0} \right) - \frac{1}{2} \cdot \cos \left(\frac{2\pi \cdot x_B}{S_0} \right) \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{19}{96} \cdot J_2 \cdot I_2 + \frac{1}{24} \cdot J_1 \cdot I_1 + \frac{3}{8} \cdot \frac{0,375}{k} - 2\pi^2 \cdot \left(J_1 \cdot I_1 - J_2 \cdot I_2 - \frac{0,375}{k} \right) \cdot (J_2 - J_1) \right\}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Введем безразмерную скорость \bar{u} и безразмерную координату \bar{x}

$$\begin{aligned}
 u &= \bar{u} \cdot \frac{S_0 \cdot (E_0 + E_1)}{\eta}; \quad k = -\frac{1}{\bar{u} \cdot S_0}; \quad k^2 \cdot S_0^2 = \frac{1}{\bar{u}^2}; \quad k \cdot S_0^2 = -\frac{S_0}{\bar{u}}; \quad k \cdot S_0 = -\frac{1}{\bar{u}}; \\
 g &= \frac{2\pi^2}{k} \cdot (e_{01} + 1) = -2\pi^2 \cdot \bar{u} \cdot S_0 \cdot (e_{01} + 1); \quad \frac{x}{S_0} = \bar{x}; \quad \frac{x_B}{S_0} = \bar{x}_B; \quad k \cdot x = -\frac{\bar{x}}{\bar{u}}; \\
 \left(g - \frac{2\pi^2}{k} \right) &= \frac{2\pi^2 \cdot e_{01}}{k} = -2\pi^2 \cdot \bar{u} \cdot e_{01} \cdot S_0; \quad \left(0,5 \cdot k \cdot S_0^2 + \frac{2\pi^2}{k} \right) = -S_0 \cdot \left(\frac{0,5}{\bar{u}} + 2\pi^2 \cdot \bar{u} \right); \\
 J_1 &= \frac{1}{4\pi^2 + k^2 \cdot S_0^2} = \frac{\bar{u}^2}{4\pi^2 \cdot \bar{u}^2 + 1}; \quad J_2 = \frac{1}{16\pi^2 + k^2 \cdot S_0^2} = \frac{\bar{u}^2}{16\pi^2 \cdot \bar{u}^2 + 1}; \\
 I_1 &= (g + 0,5 \cdot k \cdot S_0^2) = -S_0 \cdot \left(\frac{0,5}{\bar{u}} + 2\pi^2 \cdot \bar{u} \cdot (e_{01} + 1) \right); \\
 \bar{I}_1 &= S_0 \cdot \bar{I}_1; \quad \bar{I}_1 = -\left(\frac{0,5}{\bar{u}} + 2\pi^2 \cdot \bar{u} \cdot (e_{01} + 1) \right); \\
 I_2 &= (g + 0,125 \cdot k \cdot S_0^2) = -S_0 \cdot \left(\frac{0,125}{\bar{u}} + 2\pi^2 \cdot \bar{u} \cdot (e_{01} + 1) \right); \\
 \bar{I}_2 &= S_0 \cdot \bar{I}_2; \quad \bar{I}_2 = -\left(\frac{0,125}{\bar{u}} + 2\pi^2 \cdot \bar{u} \cdot (e_{01} + 1) \right).
 \end{aligned} \tag{15}$$

С учетом (15) и обозначений $F_{20} = (A^2 \cdot \xi \cdot l_k) / A_0$; $\hat{F}_2 = \bar{F}_2 \cdot F_{20}$ выражение для безразмерной деформационной силы трения выглядит следующим образом

$$\begin{aligned}
 \bar{F}_2 &= \frac{\pi}{\bar{u}} \cdot \left\{ J_2 \cdot \left[-\frac{e_{01}}{6} \cdot \sin^3 (2\pi \cdot \bar{x}_B) - \frac{e_{01}}{64} \cdot \sin (8\pi \cdot \bar{x}_B) + \frac{\pi \cdot e_{01}}{8} \cdot \bar{x}_B + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\bar{I}_2}{12\pi} \cdot (\cos (6\pi \cdot \bar{x}_B) - 3 \cdot \cos (2\pi \cdot \bar{x}_B)) - \frac{\bar{I}_2}{32\pi} \cdot \cos (8\pi \cdot \bar{x}_B) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + J_1 \cdot \left[-\frac{e_{01}}{6} \cdot \sin^3 (2\pi \cdot \bar{x}_B) - \frac{e_{01}}{8} \cdot \sin (4\pi \cdot \bar{x}_B) + \frac{e_{01}}{2} \cdot \pi \cdot \bar{x}_B + \frac{\bar{I}_1}{6\pi} \cdot \cos^3 (2\pi \cdot \bar{x}_B) - \frac{\bar{I}_1}{8\pi} \cdot \cos (4\pi \cdot \bar{x}_B) \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{19}{96} \cdot J_2 \cdot \bar{I}_2 + \frac{1}{24} \cdot J_1 \cdot \bar{I}_1 + \frac{3}{8} \cdot \frac{0,375}{k} - 2\pi^2 \cdot (J_1 \cdot \bar{I}_1 - J_2 \cdot \bar{I}_2 - \frac{0,375}{k}) \cdot (J_2 - J_1) \right\}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
 & - (J_1 \cdot \bar{I}_1 - J_2 \cdot \bar{I}_2 + 0,375 \cdot \bar{u}) \cdot \exp\left(-\frac{\bar{x}_B}{\bar{u}}\right) \cdot \left[-J_1 \cdot \left(\frac{1}{\bar{u}} \cdot \sin(2\pi \cdot \bar{x}_B) + 2\pi \cdot \cos(2\pi \cdot \bar{x}_B) \right) + \right. \\
 & + J_2 \cdot \left(\frac{0,5}{\bar{u}} \cdot \sin(4\pi \cdot \bar{x}_B) + 2\pi \cdot \cos(4\pi \cdot \bar{x}_B) \right) \left. \right] + \frac{0,375}{\pi} \cdot \bar{u} \cdot \left[\frac{1}{8} \cdot \cos(4\pi \cdot \bar{x}_B) - \frac{1}{2} \cdot \cos(2\pi \cdot \bar{x}_B) \right] + \\
 & + \frac{19}{96\pi} \cdot J_2 \cdot \bar{I}_2 - \frac{1}{24\pi} \cdot J_1 \cdot \bar{I}_1 + \frac{3}{8\pi} \cdot 0,375 \cdot \bar{u} - 2\pi \cdot (J_1 \cdot \bar{I}_1 - J_2 \cdot \bar{I}_2 + 0,375 \cdot \bar{u}) \cdot (J_1 - J_2) \}.
 \end{aligned}$$

Очевидно, что безразмерная деформационная сила трения первого микровыступа определяется из выражения (16) при контактной площадке $\bar{x}_B = \bar{x}_c$. Получим выражение для безразмерного контактного давления

$$\begin{aligned}
 \bar{p}_8(x) = p_8(x) \cdot \frac{A_0}{A \cdot \xi} = \frac{1}{\bar{u}} \cdot \{ & -J_2 \cdot [0,5 \cdot \pi \cdot e_{01} \cdot \sin(4\pi \cdot \bar{x}) + \bar{I}_2 \cdot \cos(4\pi \cdot \bar{x})] + \\
 & + J_1 \cdot [\pi \cdot e_{01} \cdot \sin(2\pi \cdot \bar{x}) + \bar{I}_1 \cdot \cos(2\pi \cdot \bar{x})] + 0,375 \cdot \bar{u} - (J_1 \cdot \bar{I}_1 - J_2 \cdot \bar{I}_2 + 0,375 \cdot \bar{u}) \cdot \exp\left(-\frac{\bar{x}}{\bar{u}}\right) \}.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Результаты моделирования

Разработанная математическая модель (17) позволяет исследовать распределение безразмерного контактного давления над выступами микрорельефа ножа, форма которых описывается периодической функцией шероховатости (4).

На рисунке 2 показана форма шероховатой поверхности ножа и распределение контактного давления над микровыступами при трех различных значениях безразмерной скорости скольжения, на рисунке 3 – при трех различных значениях меры эластичности материала.

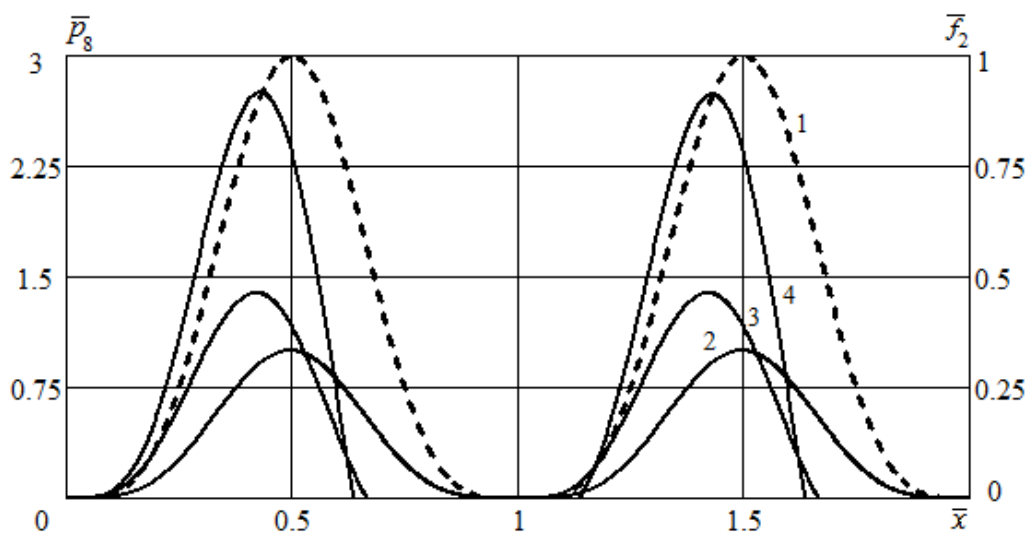


Рисунок 2 – Форма шероховатой поверхности ножа и распределение безразмерного контактного давления над микровыступами при различных значениях безразмерной скорости скольжения ($e_{01} = 5$):

1 – периодический микрорельеф поверхности грани в безразмерном виде $\bar{f}_2(x)$; 2 – контактное давление при $\bar{u} = 0,001$; 3 – $\bar{u} = 0,03$; 4 – $\bar{u} = 0,12$

Figure 2. The shape of the rough surface of the knife and the distribution of dimensionless contact pressures over microprotrusions at different values of the dimensionless sliding speed ($e_{01} = 5$):

1 – periodic microrelief of the facet surface in a dimensionless form $\bar{f}_3(\bar{x})$; 2 – contact pressure at $\bar{u} = 0,001$; 3 – $\bar{u} = 0,03$; 4 – $\bar{u} = 0,12$

На рисунке 4 изображены зависимости безразмерной координаты \bar{x}_c крайней контактной точки c микровыступа шероховатой поверхности (рисунок 1) от безразмерной скорости при четырех различных значениях меры эластичности материала. Указанная безразмерная координата \bar{x}_c является безразмерной шириной первой контактной площадки $0abc$ микровыступа. На контурном графике рисунка 5 приведены зависимости безразмерной координаты крайней точки контакта от безразмерной скорости и меры эластичности.

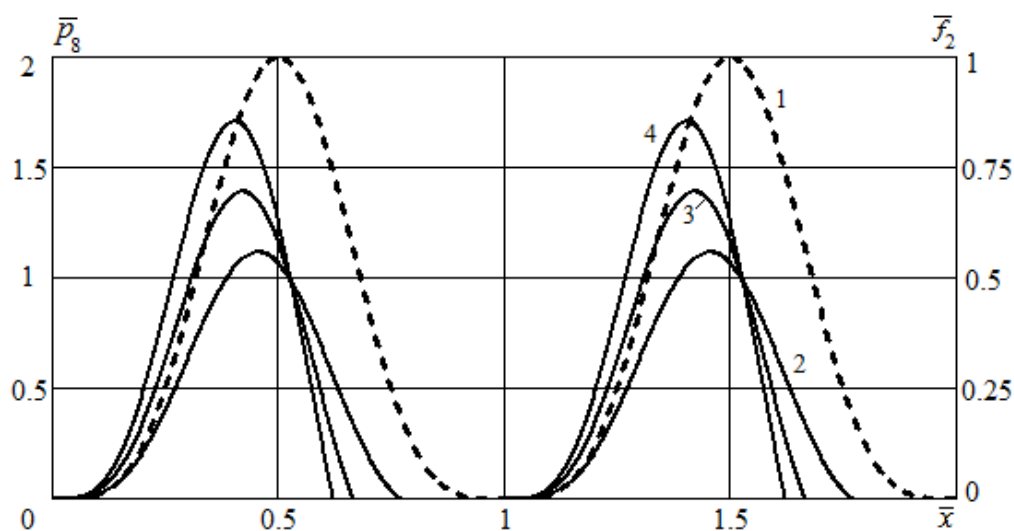


Рисунок 3 – Форма шероховатой поверхности ножа и распределение безразмерного контактного давления над микровыступами при различных значениях меры эластичности материала ($\bar{u} = 0,03$):

1 – периодический микрорельеф поверхности грани в безразмерном виде $\bar{f}_2(x)$; 2 – контактное давление при $e_{01} = 2$;

3 – $e_{01} = 5$; 4 – $e_{01} = 8$

Figure 3. The shape of the rough surface of the knife and the distribution of dimensionless contact pressures over microprotrusions at various values of the material elasticity ($\bar{u} = 0,03$):

1 – periodic microrelief of the facet surface in a dimensionless form $\bar{f}_2(x)$; 2 – contact pressure at $e_{01} = 2$; 3 – $e_{01} = 5$; 4 – $e_{01} = 8$

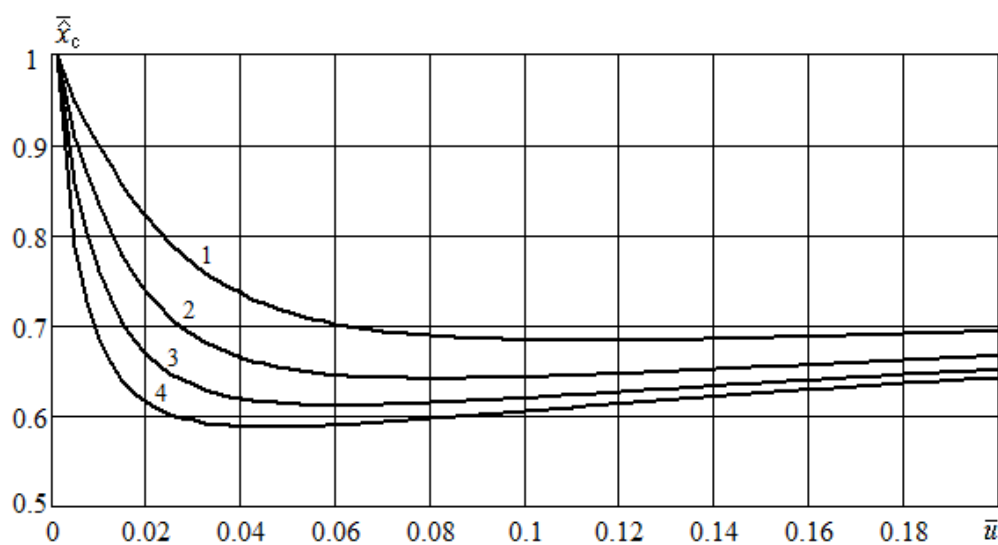


Рисунок 4 – Зависимость безразмерной координаты \bar{x}_c крайней точки контакта микровыступа шероховатой поверхности от безразмерной скорости при четырех различных значениях меры эластичности материала:

Figure 4. The dependence of the dimensionless coordinate \bar{x}_c of the extreme contact point of rough surface on microprotrusion on dimensionless velocity at four different values of the material elasticity:

1 – $e_{01} = 3$; 2 – $e_{01} = 5$; 3 – $e_{01} = 8$; 4 – $e_{01} = 12$

На рисунке 6 показаны законы изменения безразмерного контактного давления $\bar{p}_8(\bar{x})$ по длине микровыступа, функции производной $\bar{f}'_2(x)$ формы неровности, а также функции произведения $\bar{f}'_2(\bar{x}) \cdot \bar{p}_8(\bar{x})$.

Наряду с изложенным, разработанная математическая модель (16) позволяет варьировать безразмерной скоростью скольжения, мерой эластичности материала, безразмерной длиной грани ножа для исследования зависимостей безразмерной деформационной силы трения \bar{F}_2 от указанных параметров.

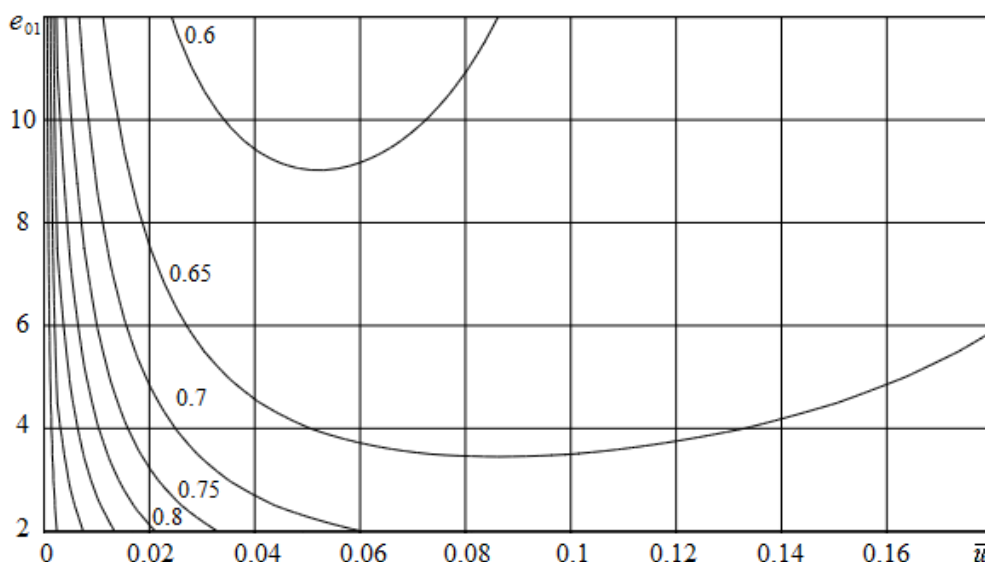


Рисунок 5 – Зависимость безразмерной координаты \bar{x}_c крайней точки контакта микровыступа шероховатой поверхности от безразмерной скорости и меры эластичности материала

Figure 5. Dependence of the dimensionless coordinate \bar{x}_c of the extreme contact point of the microprotrusion of a rough surface on the dimensionless speed and measure of the elasticity of the material

На рисунке 6 показаны зависимости безразмерной деформационной силы трения по всей грани ножа от безразмерной скорости скольжения при различных значениях безразмерной длины грани и меры эластичности материала, на рисунке 7 – от безразмерной длины грани при различных значениях безразмерной скорости скольжения и меры эластичности. На контурном графике рисунка 8 приведены зависимости безразмерной деформационной силы трения от безразмерной длины грани и безразмерной скорости скольжения, на контурном графике рисунка 9 – от безразмерной скорости и меры эластичности материала.

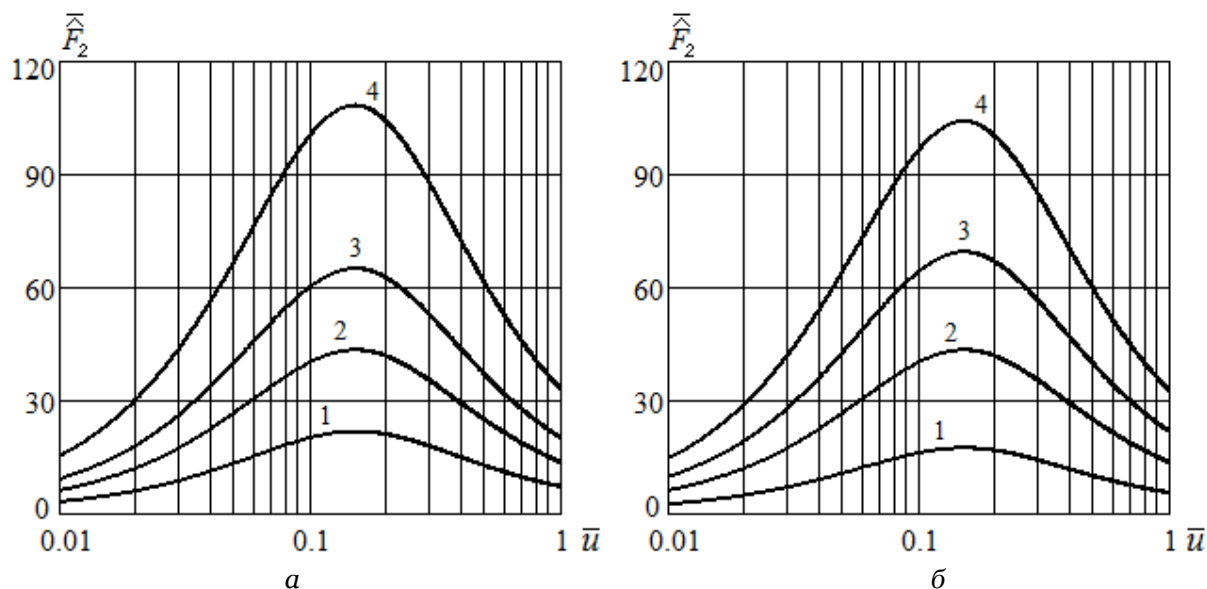


Рисунок 6 – Зависимость безразмерной силы трения от безразмерной скорости скольжения (шкала \bar{u} – логарифмическая)

а – при различных значениях безразмерной длины грани ($e_{01} = 5$): 1 – $\bar{x}_b = 10$; 2 – $\bar{x}_b = 20$; 3 – $\bar{x}_b = 30$; 4 – $\bar{x}_b = 50$

б – при различных значениях меры эластичности материала ($\bar{x}_b = 20$): 1 – $e_{01} = 2$; 2 – $e_{01} = 5$; 3 – $e_{01} = 8$; 4 – $e_{01} = 12$

Figure 6. The dependence of the dimensionless friction force on the dimensionless sliding speed (scale \bar{u} - logarithmic):

а – at various values of the dimensionless length of the facet ($e_{01} = 5$): 1 – $\bar{x}_b = 10$; 2 – $\bar{x}_b = 20$; 3 – $\bar{x}_b = 30$; 4 – $\bar{x}_b = 50$;

б – at different values of the measure of material elasticity ($\bar{x}_b = 20$): 1 – $e_{01} = 2$; 2 – $e_{01} = 5$; 3 – $e_{01} = 8$; 4 – $e_{01} = 12$

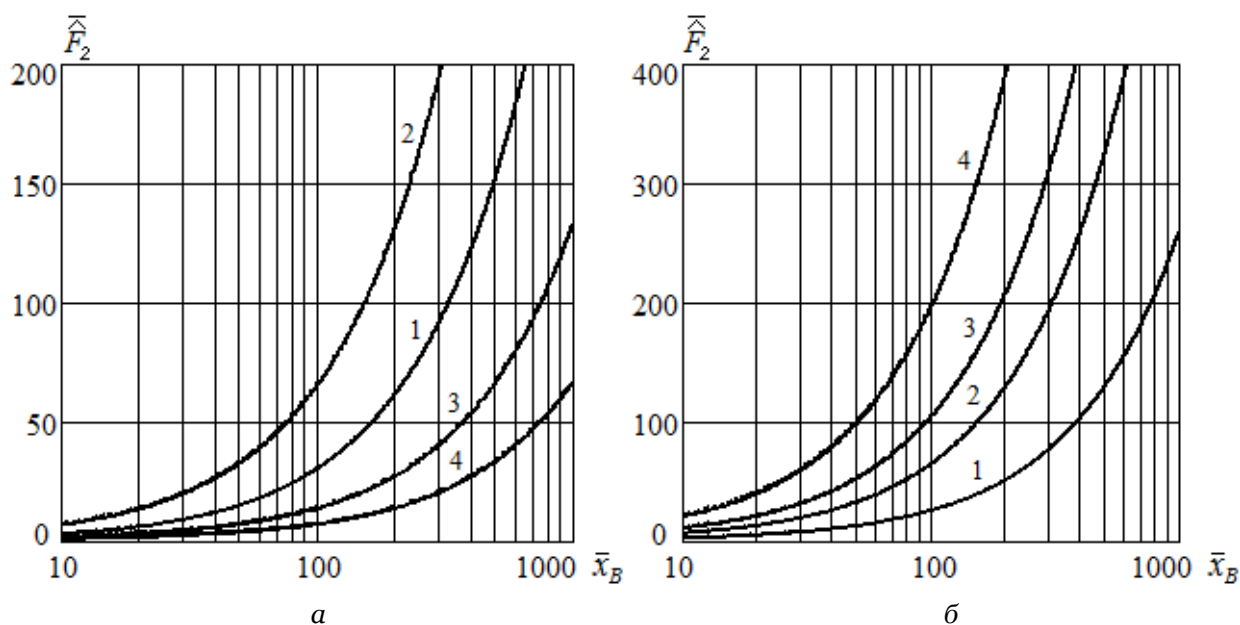


Рисунок 7 – Зависимость безразмерной силы трения от безразмерной длины грани (шкала \bar{x}_B – логарифмическая)

а – при различных значениях безразмерной скорости скольжения ($e_{01} = 5$): 1 – $\bar{u} = 0,01$; 2 – $\bar{u} = 1$; 3 – $\bar{u} = 5$; 4 – $\bar{u} = 10$

б – при различных значениях меры эластичности материала ($\bar{u} = 1$): 1 – $e_{01} = 2$; 2 – $e_{01} = 5$; 3 – $e_{01} = 8$; 4 – $e_{01} = 15$

Figure 7. The dependence of the dimensionless friction force on the dimensionless sliding speed (scale \bar{x}_B - logarithmic):

а – at various values of the dimensionless sliding speed ($e_{01} = 5$): 1 – $\bar{u} = 0,01$; 2 – $\bar{u} = 1$; 3 – $\bar{u} = 5$; 4 – $\bar{u} = 10$;

б – at different values of the measure of material elasticity ($\bar{u} = 1$): 1 – $e_{01} = 2$; 2 – $e_{01} = 5$; 3 – $e_{01} = 8$; 4 – $e_{01} = 15$

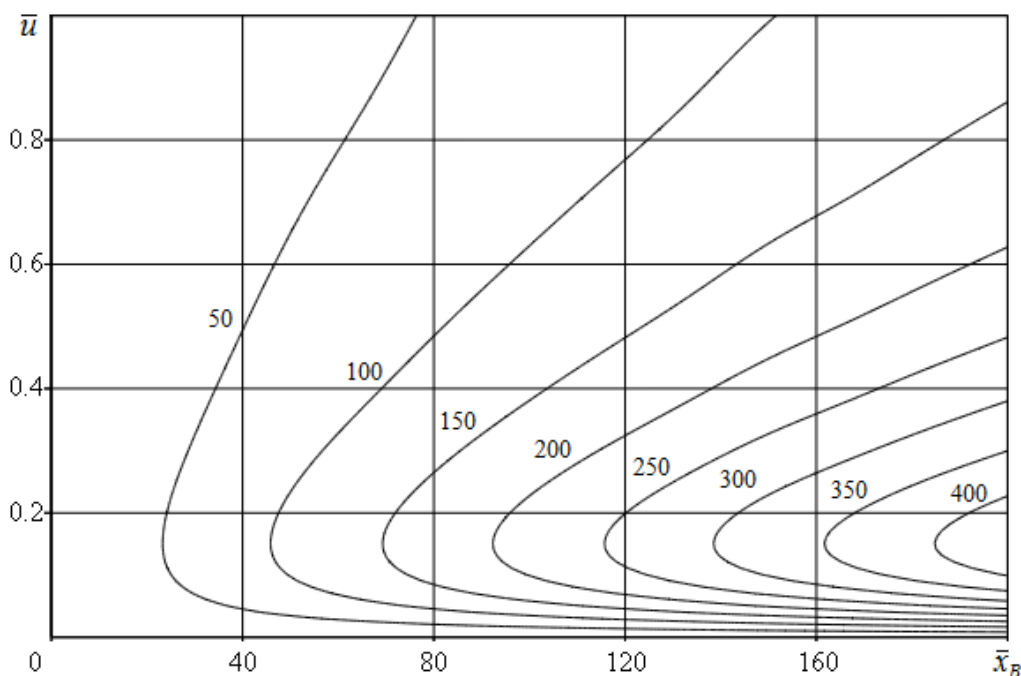


Рисунок 8 – Зависимость безразмерной силы трения \bar{F}_2 от безразмерной длины грани и безразмерной скорости скольжения ($e_{01}=5$)

Figure 8. The dependence of the dimensionless friction \bar{F}_2 on the dimensionless length of the facet and on the dimensionless sliding speed ($e_{01} = 5$)

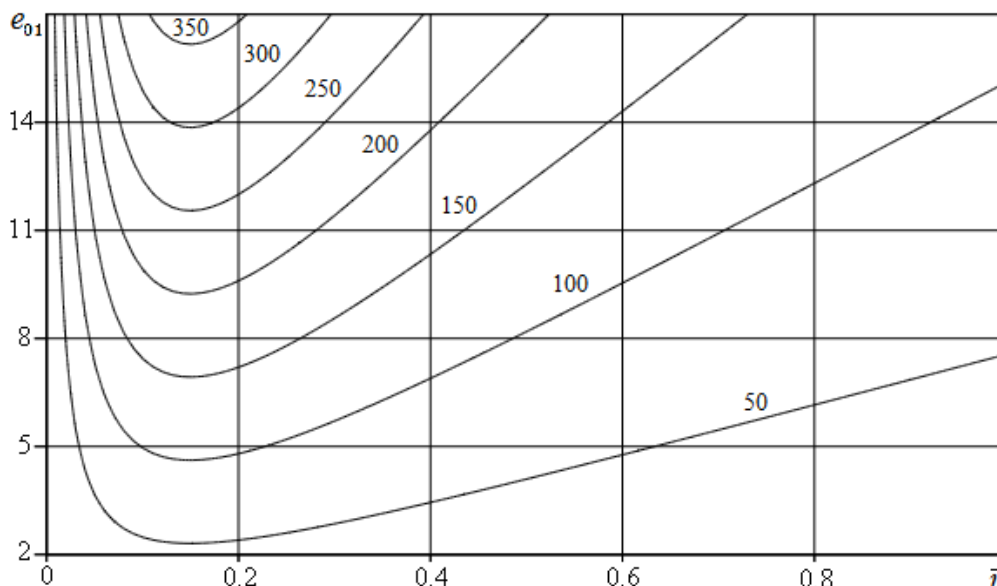


Рисунок 9 – Зависимость безразмерной силы трения \bar{F}_2 от безразмерной скорости скольжения и меры эластичности ($\bar{x}_B = 50$)

Figure 9. The dependence of the dimensionless friction \bar{F}_2 on the dimensionless sliding speed and on the measure of material elasticity ($\bar{x}_B = 50$)

Обсуждение результатов

Как видно из рисунка 2, функция безразмерного контактного давления является периодической, амплитудные значения которой существенно возрастают с повышением безразмерной скорости скольжения. Давление возрастает на выступе и уменьшается на впадине. Предельное значение соответствует решению задачи для упругого материала. При увеличении безразмерной скорости распределение давления в контакте становится более несимметричным. Кроме того, имеет место смещение области контакта относительно оси симметрии каждого микровыступа в сторону скольжения неровности. При дальнейшем росте скорости распределение контактного давления приближается к осесимметричному виду относительно оси симметрии микровыступов. При значениях меры эластичности 5, безразмерной скорости 0,001; 0,03; 0,12 максимальная амплитуда контактного давления составляет 1,0; 1,391; 2,750 соответственно.

Рисунок 3 иллюстрирует, что амплитудные значения безразмерного контактного давления существенно увеличиваются с повышением меры эластичности материала. При заданной безразмерной скорости скольжения рост меры эластичности приводит к тому, что область контакта смещается и становится более несимметричной.

Рисунок 4 демонстрирует, что безразмерная ширина контактной площадки немонотонно зависит от скорости: при определенной безразмерной скорости имеется явно выраженный минимум, величина которого зависит от меры эластичности материала. С ростом безразмерной скорости безразмерная координата крайней точки контакта стремится к предельному значению, соответствующему решению задачи для упругого материала. Форма микровыступа существенно влияет на амплитуду безразмерного контактного давления и безразмерную ширину контактной площадки. При значениях меры эластичности 2; 4; 7; 12 минимальные значения безразмерной ширины контактной площадки составляют 0,683; 0,641; 0,612; 0,588, предельное значение составляет 0,684. Результаты моделирования на рисунке 5 показывают, что безразмерная ширина контактной площадки монотонно зависит от меры эластичности материала и немонотонно зависит от безразмерной скорости скольжения.

Анализ выражения (14) показывает, что размерная деформационная сила трения зависит от высоты микровыступов, высоты деформируемого приповерхностного слоя материала, длины грани ножа, реологических свойств мышечной ткани, скорости скольжения и длины кромки ножа.

Рисунок 6 демонстрирует, что безразмерная деформационная сила трения является немонотонной функцией безразмерной скорости скольжения. При скоростях скольжения, стремящихся к нулю или бесконечности, указанная сила стремится к нулю. Это соответствует решению задачи для вдавливания

микровыступов в упругий материал, который характеризуется длительным модулем упругости ξ . Величина силы существенно возрастает с ростом меры эластичности материала. При значениях меры эластичности 5; безразмерной длины грани 10; 20; 30; 50 значения максимума деформационной силы трения составляют соответственно 21,728; 43,360; 64,993; 108,258. При значениях безразмерной длины грани 20; меры эластичности 2; 5; 8; 12 значения максимума силы составляют соответственно 17,344; 43,360; 69,376; 104,064.

Рисунки 6, 7 иллюстрируют, что деформационная сила трения существенно возрастает с увеличением безразмерной длины грани ножа. Контурный график на рисунке 8 также демонстрирует, что при заданной скорости скольжения указанная сила монотонно и нелинейно повышается с удлинением грани режущего органа, поскольку возрастает суммарная контактная площадь трения. Контурный график рисунка 9 показывает, что безразмерная сила трения при заданной скорости монотонно зависит от меры эластичности.

Заключение

Распределение контактных давлений и деформационная сила трения ножа существенно зависят от формы неровностей шероховатой поверхности грани, а также от скорости резания и реологических свойств материала. Безразмерная ширина контактной площадки микровыступов монотонно зависит от меры эластичности материала и немонотонно зависит от безразмерной скорости скольжения с явно выраженным минимумом.

Установленные зависимости позволяют научно обоснованно управлять геометрической формой неровностей технологической шероховатости ножа с целью минимизации деформационной силы трения при резании пищевых продуктов. Разработка математических моделей для расчета указанной силы создает практическую основу для оптимизации геометрии ножа по критерию минимального сопротивления резанию с учетом параметров различного масштаба: макрогеометрической формы режущего органа и микрогеометрической шероховатости его поверхности.

Основные направления дальнейших исследований следующие: разработка математических моделей для расчета деформационной силы трения шероховатой поверхности режущего органа, микрорельеф которой включает три гармоники. Кроме того, необходимо установить зависимости указанной силы от параметров формы единичного микровыступа – числа гармоник и коэффициента заполнения. Представляется целесообразным определение силы трения и коэффициента трения с учетом адгезионного притяжения между материалом и шероховатой поверхностью ножа.

Литература

1. Григорьев А.Я. Физика и микрогеометрия технических поверхностей. Минск: Беларуская навука, 2016. 247 с.
2. Пеленко В.В., Кузьмин В.В. Оптимизация формы режущей кромки лезвия ножа для волчка при измельчении охлажденного или дефростированного мясного сырья // Известия высших учебных заведений. Пищевая технология. 2009. № 1. С. 95–96.
3. Хромеев В.М. Моделирование режущей кромки ножа при скользящем резании пищевых продуктов // Известия высших учебных заведений. Пищевая технология. 1997. № 4–5. С. 65–67.
4. Пеленко В.В., Зуев Н.А., Ольшевский Р.Г., Азаев Р.А., Кузьмин В.В. Фундаментальные особенности процесса резания пищевых продуктов лезвийным инструментом // Научный журнал НИУ ИТМО. Серия: Процессы и аппараты пищевых производств. 2008. № 1(5).
5. Boisly M., Schuldt S., Kaestner M.G., Schneider Y., Rohm H. Experimental characterisation and numerical modelling of cutting processes in viscoelastic solids. *Journal of Food Engineering*. 2016, no. 191, pp. 1–9.
6. Schuldt S., Arnold G., Kowalewski J., Schneider Y., Rohm H. Analysis of the sharpness of blades for food cutting. *Journal of Food Engineering*. 2016, no. 188, pp. 13–20.
7. Spagnoli A., Brighenti R., Terzano M., Artoni F. Cutting resistance of soft materials: Effects of blade inclination and friction. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2019, no. 101, pp. 200–206.
8. Xiao-Ping Zhou, Liang Fu, Wang Ju, Berto F. An experimental study of the mechanical and fracturing behavior in PMMA specimen containing multiple 3D embedded flaws under uniaxial compression. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2019, no. 101, pp. 207–216.
9. Schuldt S., Schneider Y., Rohm H. High-speed cutting of foods: Cutting behavior and initial cutting forces. *Journal of Food Engineering*. 2018, no. 230, pp. 55–62.
10. Belaasilia Y., Braikat B., Jamal M. High order mesh-free method for frictional contact. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2017, no. 82, pp. 68–78.

11. Belaasilia Y., Timesli A., Braikat B., Jamal M. A numerical mesh-free model for elasto-plastic contact problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2018, no. 94, pp. 103–112.
12. Pagani M., Perego U. Explicit dynamics simulation of blade cutting of thin elastoplastic shells using «directional» cohesive elements in solid-shell finite element models. *Computer methods in applied Mechanics and Engineering*. 2015, no. 285, pp. 515–541.
13. Wang P., Ni H., Wang R., Li Zh., Wang Y. Experimental investigation of the effect of in-plane vibrations on friction for different materials. *Tribology International*. 2016, no. 99, pp. 237–247.
14. Jadav P.U., Amali R., Adetoro O.B. Analytical friction model for sliding bodies with coupled longitudinal and transverse vibration. *Tribology International*. 2018, no. 126, pp. 240–248.
15. Солдатенков И.А. Износоконтактная задача с приложениями к инженерному расчету износа. М.: Физматкнига, 2010. 160 с.
16. Солдатенков И.А. Расчет трения индентора с фрактальной шероховатостью о вязкоупругое основание // Трение и износ. 2015. Том 36. № 3. С. 257–262.
17. Popov V.L. *Contact Mechanics and Friction. Physical Principles and Applications*. Berlin, Springer-Verlag GmbH, 2017. 391 p.
18. Агеев О.В., Фатыхов Ю.А., Самойлова Н.В. Выбор и идентификация реологической модели структурно-механических свойств мышечной ткани рыбы // Известия Калининградского государственного технического университета. 2018. № 49. С. 75–91.
19. Агеев О.В., Наумов В.А., Фатыхов Ю.А., Самойлова Н.В. Анализ соответствия реологических моделей структурно-механическим свойствам рыбы // Научный журнал НИУ ИТМО. Серия: Процессы и аппараты пищевых производств. 2018. № 2(36). С. 34–43.
20. Агеев О.В., Наумов В.А., Фатыхов Ю.А. Математическое моделирование сил нормального контактного давления на боковые грани ножа при резании пищевых материалов // Научный журнал НИУ ИТМО Серия: Процессы и аппараты пищевых производств. 2017. № 4. С. 27–42.

References

1. Grigoriev A.Ya. *Physics and microgeometry of technical surfaces*. Minsk, Belaruskaya navuka Publ., 2016, 247 p.
2. Pelenko V.V., Kuz'min V.V. Optimization of form of cutting edges of edge of knife for top at crushing of cooled of defrosted meat raw material. *News of Higher Education Institutions. Food Technology*. 2009, no. 1, pp. 95–96.
3. Khromeenkov V.M. Simulation of the knife cutting edge during food sliding cutting. *News of Higher Education Institutions. Food Technology*. 1997, no. 4-5, pp. 65-67.
4. Pelenko V.V., Zuev N.A., Ol'shevskii R.G., Azaev R.A., Kuz'min V.V. Fundamental features of process of cutting food products by blade tool. *Processes and Food Production Equipment*. 2008, no. 1(5).
5. Boisly M., Schuldt S., Kaestner M.G., Schneider Y., Rohm H. Experimental characterisation and numerical modelling of cutting processes in viscoelastic solids. *Journal of Food Engineering*. 2016, no. 191, pp. 1–9.
6. Schuldt S., Arnold G., Kowalewski J., Schneider Y., Rohm H. Analysis of the sharpness of blades for food cutting. *Journal of Food Engineering*. 2016, no. 188, pp. 13–20.
7. Spagnoli A., Brighenti R., Terzano M., Artoni F. Cutting resistance of soft materials: Effects of blade inclination and friction. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2019, no. 101, pp. 200–206.
8. Xiao-Ping Zhou, Liang Fu, Wang Ju, Berto F. An experimental study of the mechanical and fracturing behavior in PMMA specimen containing multiple 3D embedded flaws under uniaxial compression. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2019, no. 101, pp. 207–216.
9. Schuldt S., Schneider Y., Rohm H. High-speed cutting of foods: Cutting behavior and initial cutting forces. *Journal of Food Engineering*. 2018, no. 230, pp. 55–62.
10. Belaasilia Y., Braikat B., Jamal M. High order mesh-free method for frictional contact. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2017, no. 82, pp. 68–78.
11. Belaasilia Y., Timesli A., Braikat B., Jamal M. A numerical mesh-free model for elasto-plastic contact problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2018, no. 94, pp. 103–112.
12. Pagani M., Perego U. Explicit dynamics simulation of blade cutting of thin elastoplastic shells using «directional» cohesive elements in solid-shell finite element models. *Computer methods in applied Mechanics and Engineering*. 2015, no. 285, pp. 515–541.
13. Wang P., Ni H., Wang R., Li Zh., Wang Y. Experimental investigation of the effect of in-plane vibrations on friction for different materials. *Tribology International*. 2016, no. 99, pp. 237–247.
14. Jadav P.U., Amali R., Adetoro O.B. Analytical friction model for sliding bodies with coupled longitudinal and transverse vibration. *Tribology International*. 2018, no. 126, pp. 240–248.
15. Soldatenkov I.A. *Wear-contact problem with applications for calculation of wear*. Moscow, Fizmatkniiga Publ., 2010, 160 p.
16. Soldatenkov I.A. Calculation of friction force for indenter with fractal roughness in sliding on viscoelastic foundation. *Friction and Wear*. 2015, V. 36, no. 3, pp. 257–262.

17. Popov V.L. *Contact Mechanics and Friction. Physical Principles and Applications*. Berlin, Springer-Verlag GmbH, 2017, 391 p.
18. Ageev O.V., Fatykhov Yu.A., Samoiloa N.V. Selection and identification of rheological model of the structural-mechanical properties of muscular fish tissue. *Kaliningrad St. Tech. University News*. 2018, no. 49, pp. 75–91.
19. Ageev O.V., Naumov V.A., Fatykhov Yu.A., Samoiloa N.V. Correspondence of rheological models to the structural-mechanical properties of fish. *Processes and Food Production Equipment*. 2018, no. 2(36), pp. 34–43.
20. Ageev O.V., Naumov V.A., Fatykhov Yu.A. Mathematical simulation of forces of normal contact pressure on side knife edges during cutting of food materials. *Processes and Food Production Equipment*. 2017, no. 4(34), pp. 27–42.

Статья поступила в редакцию 24 июня 2019 года