

УДК 664.9.022

Математическое моделирование сил сопротивления формы ножа при резании рыбы

Канд. техн. наук **О.В. Агеев**, oleg.ageev@klgtu.ru
 д-р техн. наук **В.А. Наумов**, vladimir.naumov@klgtu.ru
 д-р техн. наук **Ю.А. Фатыхов**, yuriy.fatyhov@klgtu.ru
*Калининградский государственный технический университет
 236022, Россия, Калининград, Советский пр., д.1*

Описано математическое моделирование сил вредных сопротивлений, действующих на грани ножа при резании рыбы. Мышечная ткань рыбы описана реологической моделью Максвелла–Томсона. Приняты условия стесненного сжатия материала по направлению резания, также перпендикулярно движению ножа. На основе энергетического подхода сила сопротивления формы ножа интерпретирована как деформационная сила трения на макроскопическом масштабном уровне при условии гладкости поверхности граней. Разработаны математические модели для размерных и безразмерных сил сопротивления формы однокромочного и двухкромочных ножей. Установлены зависимости размерных и безразмерных сил от геометрии ножа, глубины погружения лезвия в материал, скорости резания и реологических констант материала. Зависимости сил от безразмерной скорости являются монотонными, в то время как при отсутствии стесненного сжатия материала по направлению резания соответствующие зависимости проявляют немонотонность и имеют явно выраженные максимумы. Выполнен сравнительный анализ безразмерных сил сопротивления формы ножа с прямым обухом и двухкромочных ножей. Показано, что использование двухкромочного ножа без боковых граней обеспечивает существенное снижение безразмерной силы вредных сопротивлений и сокращение энергетических затрат на резание рыбы. При значениях безразмерной глубины погружения лезвия, безразмерной скорости резания, безразмерной высоты образца материала, меры эластичности материала, отношения тангенсов половинных углов заточки двухкромочных ножей, безразмерной высоты ножа с боковыми гранями величины безразмерных сил сопротивления формы однокромочного ножа и двухкромочных ножей составляют 57,89; 57,05; 56,34 соответственно, в то время как безразмерная сила сопротивления формы однокромочного ножа при отсутствии стесненного сжатия материала по направлению резания составляет 1,91.

Ключевые слова: предварительная обработка сырья; резание рыбы; математическое моделирование; сила сопротивления; форма ножа; реология; вязкоупругость.

DOI: 10.17586/2310-1164-2019-12-1-46-61

Mathematical simulation of knife profile resistance forces during fish cutting

Ph. D. **Oleg V. Ageev**, oleg.ageev@klgtu.ru
 D. Sc. **Vladimir A. Naumov**, vladimir.naumov@klgtu.ru
 D. Sc. **Yuri A. Fatykhov**, yuriy.fatyhov@klgtu.ru
*Kaliningrad State Technical University
 1, Sovietsky ave., Kaliningrad, 236022, Russia*

The relevance of researching the process of fish cutting and modeling forces of harmful resistance has been shown. Muscular tissue of fish has been described by Maxwell-Thomson rheological model. The conditions of constrained compression in the direction of cutting and perpendicular to direction of knife movement have been accepted. On the basis of the energy approach the knife profile resistance force has been interpreted as deformational friction force at the macroscopic scale level, provided that the surface of the faces is smooth. The mathematical models for dimensional and dimensionless profile resistance forces of the flat back and double-edged knives have been developed. The dependences of the dimensional and dimensionless forces on the knife geometry, blade immersion depth, cutting speed, and rheological properties of material have been established. The dependencies of forces on the dimensionless cutting speed are monotonic, while by absence of constrained compression of the material in the direction of cutting, the corresponding dependences exhibit non-monotonicity and have pronounced maximums. A comparative analysis of the dimensionless profile resistance forces of flat back knife and double-edged knives has been carried out. Using double-edged knife without side edges is shown to provide a significant reduction in the force of harmful resistances and a reduction in the energy consumption during fish cutting. When the value of dimensionless immersion depth, dimensionless cutting speed, dimensionless

sample material height, the measure of material elasticity, ratio of half sharpening angles tangent of double-edged knives, dimensionless height of knife with back sides, then the values of dimensionless profile resistance forces of flat back knife and double-edged knives are 57.89; 57.05; 56.34 respectively, while dimensionless profile resistance force of flat back knife without constrained compression in the cut direction is 1.91.

Keywords: pretreatment of raw materials; fish cutting; math modeling; resistance force; knife profile; rheology; viscoelasticity.

Введение

Обеспечение ресурсосбережения при резании рыбы предусматривает тщательный анализ сил сопротивления [1]. Снижение силы вредного сопротивления предполагает минимизацию ее составляющих – силы сопротивления формы и силы трения [2].

Математическое моделирование процесса резания пищевых продуктов является актуальным научным направлением и привлекает внимание исследователей в России и за рубежом. В работах [3, 4] исследованы экспериментальные зависимости между силой сопротивления разрушения волокнистого материала и скоростью движения ножа. В статье [5] установлено влияние угла заточки лезвия на параметры процесса резания. В работе [6] выявлены закономерности высокоскоростной обработки вязкоупругих материалов в широком диапазоне скоростей. В статье [7] проведено конечно-элементное моделирование процесса разрушения вязкоупругого продукта. В работах [8, 9] показан подход к определению оптимальной геометрии ножа по критерию максимизации касательной составляющей силы резания.

Однако, несмотря на ценность известных работ, в настоящее время отсутствует аналитическое описание сил вредных сопротивлений, действующих на рабочий орган при резании рыбы. В то же время для оптимизации геометрии ножа по критерию минимального сопротивления резанию требуется математическое моделирование сил, действующих на его грани.

Материал

В работах [10, 11] обоснован выбор реологических моделей мышечной ткани рыбы. Рассмотрены дифференциальные уравнения моделей с их решениями для трех различных условий нагружения. Изложены результаты экспериментальных испытаний мышечной ткани ставриды, скумбрии, сардинеллы атлантической на прямую ползучесть, релаксацию и обратную ползучесть. Установлено, что мышечная ткань рыбы до разрушения проявляет ограниченное течение под нагрузкой, релаксирует при постоянной нагрузке до равновесного состояния, полностью восстанавливается при полной разгрузке. Показано, что результатам проведенных экспериментальных испытаний приближенно соответствует трехэлементная реологическая модель Максвелла–Томсона.

Методы

Целью математического моделирования является определение силы сопротивления формы, возникающей при резании рыбы ножами при условии стесненного сжатия материала в направлении движения лезвия.

Согласно современным представлениям трибологии [12, 13], сила сопротивления формы интерпретирована как деформационная сила трения на макроскопическом масштабном уровне. На данном уровне решается задача определения силы трения скольжения штампа (ножа как абсолютно твердого гладкого тела) по деформируемому вязкоупругому материалу (разрезанной мышечной ткани рыбы). При этом шероховатость поверхности ножа не учитывается, поскольку определяющей является геометрия профиля режущего рабочего органа.

Задачу нахождения деформационной силы трения при скольжении ножа по вязкоупругому материалу на макроскопическом уровне (силы сопротивления формы) целесообразно решать на основе энергетического подхода. Такой подход является более общим и основан на определении потерь энергии, обусловленных вязкоупругой деформацией материала. Энергетический подход подробно рассмотрен в работах [14, 15], которые отличаются ясностью постановки и конструктивными результатами. Энергетический подход справедлив для штампа произвольной формы, что позволяет применять его к ножам с различными профилями.

Математическое моделирование сил сопротивления формы

Согласно энергетическому подходу при скольжении штампа диссипация энергии в вязкоупругом материале происходит за счет вязкого трения в демпфере элемента Кельвина–Фойгта модели Максвелла–Томсона [10]. Воспользуемся результатами работ [14, 15] для определения силы сопротивления формы ножа при резании рыбы.

В [14] удельная деформационная сила трения штампа при скольжении по вязкоупругому основанию определена в следующем виде

$$F = \int_a^b [g'(y) \cdot p(y)] dy + \frac{1}{2 \cdot E_0} \cdot [p^2(b) - p^2(a)], \tag{1}$$

где $p(y)$ – нормальное контактное давление на штамп со стороны материала;

$g(y)$ – функция, определяющая геометрию штампа (форму профиля ножа);

$g'(y)$ – производная указанной функции;

a, b – координаты по оси $(0, y)$ крайних точек штампа произвольной формы.

Функция $g(y)$ определяет разность координат точки профиля штампа с координатой y и точки профиля с нулевой координатой, так что $g(0) = 0$.

Таким образом, на основе уравнения (1) представляется возможным определить силу сопротивления формы, используя величину нормального контактного давления материала в точках соответствующих граней. Применим данное уравнение для определения сил сопротивления формы ножа с прямым обухом, двухкромочного ножа с боковыми гранями и двухкромочного ножа без боковых граней. Для этого рассмотрим движение в мышечной ткани рыбы элементарного ножа, изображенного на рисунке. 1. Примем условия стесненного сжатия мышечной ткани по осям Ox и Oy . Механическое поведение элементарных волокон dx и dy при их деформировании гранью ножа описывается двумя дифференциальными уравнениями модели Максвелла–Томсона. При этом предполагается независимость относительных деформаций волокон по осям Ox и Oy . В квазистатической постановке считаем, что в любой момент времени нож находится в состоянии равновесия. При резании лезвие совершает в материале прямолинейное равномерное движение.

Вследствие независимого сжатия горизонтальных dy и вертикальных dx элементарных волокон в точке A наклонной грани действует контактное усилие $\vec{\sigma}'_2$, обусловленное внутренними напряжениями в материале. Вектор $\vec{\sigma}'_2$ состоит из нормальной \vec{p}_2 (перпендикулярной направлению движения ножа), тангенциальной \vec{q}_2 (параллельной направлению движения ножа) и встречной \vec{s}_2 , составляющих: $\vec{\sigma}'_2 = \vec{p}_2 + (\vec{q}_2 + \vec{s}_2)$. Нормальная составляющая \vec{p}_2 является проекцией вектора $\vec{\sigma}'_2$ на нормаль к направлению движения ножа, сумма тангенциальной \vec{q}_2 и встречной \vec{s}_2 составляющих является проекцией вектора $\vec{\sigma}'_2$ на направление движения ножа.

Нормальная составляющая \vec{p}_2 является нормальным контактным давлением (нормальным к направлению движения лезвия) горизонтального элементарного волокна dy в точке A наклонной грани ножа. Встречная составляющая \vec{s}_2 является контактным давлением вертикального элементарного волокна dx в точке A . Тангенциальная составляющая \vec{q}_2 является встречным сопротивлением материала движению точки A ножа, обусловленным деформацией указанного волокна по оси Ox . Наличие вектора \vec{s}_2 приводит к отклонению вектора $\vec{\sigma}'_2$ от нормали к поверхности грани на угол ψ , а также к образованию контактного усилия, направленного по касательной к поверхности грани. Справедливы соотношения $p_2 = \sigma'_2 \cdot \sin(\psi + \alpha)$, $(q_2 + s_2) = \sigma'_2 \cdot \cos(\psi + \alpha)$.

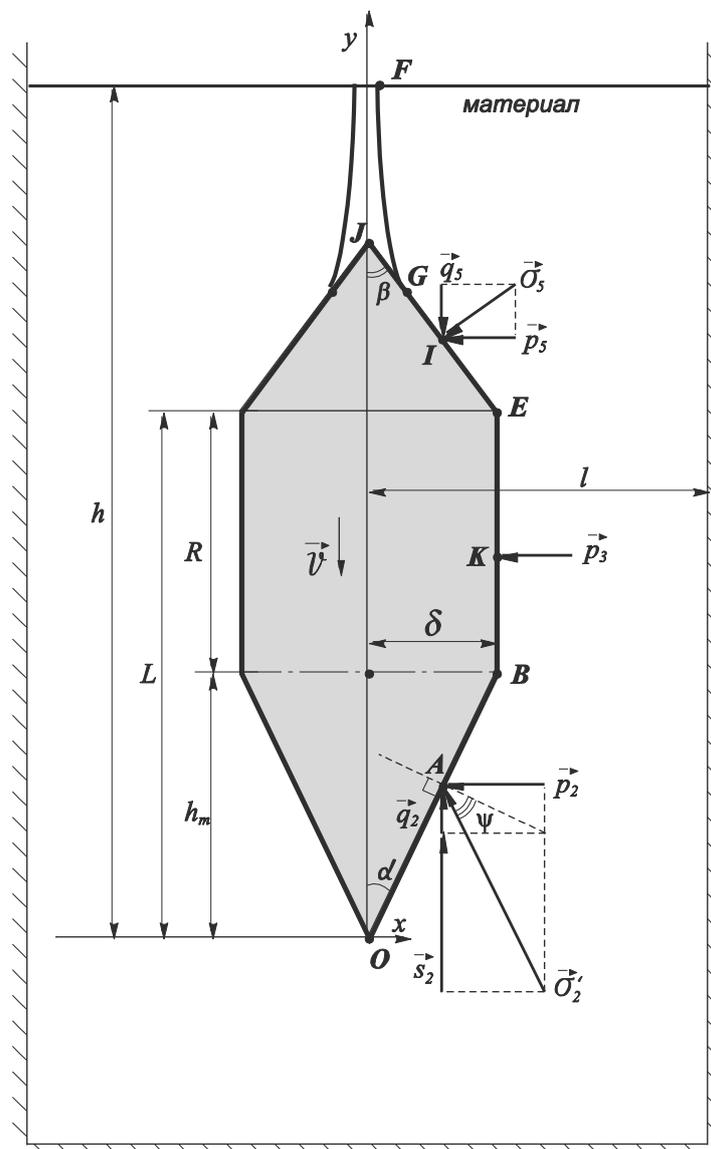


Рисунок 1 – Схема движения элементарного ножа при условии стесненного сжатия материала в направлении резания
 Figure 1. Elementary knife movement under the conditions of constrained compression in the direction of cutting

Введем следующие обозначения:

E_0 – мгновенный модуль упругости мышечной ткани рыбы (модуль Юнга);

E_1 – запаздывающий (высокоэластичный) модуль упругости мышечной ткани рыбы;

η – коэффициент динамической вязкости мышечной ткани рыбы;

$e_{01} = E_0/E_1$ – мера эластичности мышечной ткани рыбы;

l_k – длина кромки лезвия;

δ – половинная толщина ножа;

α – половинный угол заточки передней кромки ножа;

β – половинный угол заточки задней кромки ножа;

$t_{\alpha\beta} = \text{tg}\alpha/\text{tg}\beta$;

h_m – высота передней наклонной грани;

L – высота ножа с прямым обухом;

l – половинная ширина материала в состоянии равновесия;

H – высота образца материала;

v – скорость ножа;

y_G – координата крайней точки контакта G ;

$$\xi = \frac{E_0 \cdot E_1}{E_0 + E_1} = \frac{E_0}{1 + E_0 / E_1} - (\text{квазистатический модуль упругости});$$

$$k = -\frac{E_0 + E_1}{\eta \cdot v};$$

$$\mu = 1 - \exp\left(\frac{k \cdot \delta}{\text{tg}\alpha}\right);$$

$$\chi = \frac{\xi \cdot \eta \cdot v \cdot \mu \cdot \text{tg}\alpha}{E_1^2 \cdot \delta}.$$

Размерная сила сопротивления формы F_1 и безразмерная сила \bar{F}_1 соответствуют ножу с прямым обухом без задней наклонной грани EJ , \hat{F}_1 и \bar{F}_1 – двухкромочному ножу с боковыми гранями, \check{F}_1 и $\bar{\check{F}}_1$ – двухкромочному ножу без боковой грани BE .

В работах [2, 16, 17] определены нормальные контактные давления горизонтальных элементарных волокон на грани ножа. Увеличение деформации сжатия в процессе раздвижения материала приводит к росту внутренних напряжений и в вертикальных элементарных волокнах. Следовательно, для нахождения контактного давления со стороны элементарного волокна на наклонную грань необходимо определить внутреннее напряжение в сжимаемом вязкоупругом волокне при увеличении его относительной деформации с заданной скоростью.

Заметим, что при установившемся движении ножа рост деформации вертикального волокна dx происходит с постоянной скоростью v движения ножа в материале. Тогда при сжатии материала наклонной гранью относительная деформация вертикального элементарного волокна зависит от времени t_1 с момента погружения точки O в материал, скорости движения ножа в материале v следующим образом:

$$\varepsilon_y = \frac{v}{H} \cdot t_1; \quad \frac{d\varepsilon_y}{dt} = \frac{v}{H}. \quad (2)$$

С учетом (2) преобразуем дифференциальное уравнение состояния материала к следующему виду:

$$\frac{ds_2}{dt_1} + \frac{E_0 + E_1}{\eta} \cdot s_2 = \frac{v}{H} \cdot E_0 + \frac{E_0 \cdot E_1}{\eta} \cdot \frac{v \cdot t_1}{H}. \quad (3)$$

В результате решения полученного дифференциального уравнения (3) с начальным условием ($t_1 = 0$; $s_2 = 0$) имеем:

$$s_2 = \frac{E_0 \cdot E_1 \cdot v}{(E_0 + E_1) \cdot H} \cdot t_1 + \frac{E_0^2 \cdot \eta \cdot v}{(E_0 + E_1)^2 \cdot H} \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{E_0 + E_1}{\eta} \cdot t_1\right)\right). \quad (4)$$

Поскольку $v \cdot t_1 = h$, из (4) выразим контактное давление как функцию глубины погружения ножа h :

$$s_2(h) = \frac{\xi}{H} \cdot h + \frac{\xi^2 \cdot \eta \cdot v}{E_1^2 \cdot H} \cdot (1 - \exp(k \cdot h)). \quad (5)$$

Перейдем к подвижной декартовой системе координат (x, y) , связанной с режущей кромкой ножа (рисунок 1). В данной подвижной системе контактное давление является функцией координаты y , а также функцией координаты x :

$$s_2(y) = \frac{\xi}{H} \cdot (h - y) + \frac{\xi^2 \cdot \eta \cdot v}{E_1^2 \cdot H} \cdot (1 - \exp[k \cdot (h - y)]); \quad y \in (0, h),$$

$$s_2(x) = \frac{\xi}{H} \cdot \left(h - \frac{x}{\text{tg}\alpha}\right) + \frac{\xi^2 \cdot \eta \cdot v}{E_1^2 \cdot H} \cdot \left(1 - \exp\left[k \cdot \left(h - \frac{x}{\text{tg}\alpha}\right)\right]\right); \quad x \in (0, l) \quad (6)$$

При полном погружении передней наклонной грани в материал $h = h_m$ (рисунок 1). В этом случае, в точке O контактное давление составляет $s_2(0) = \frac{\xi}{H} \cdot h_m + \frac{\xi^2 \cdot \eta \cdot v}{E_1^2 \cdot H} \cdot (1 - \exp[k \cdot h_m])$, в точке B контактное давление определяется выражением

$$s_2(h_m) = \frac{\xi}{H} \cdot (h_m - h_m) + \frac{\xi^2 \cdot \eta \cdot v}{E_1^2 \cdot H} \cdot (1 - \exp[k \cdot (h_m - h_m)]) = 0.$$

Выражение для силы сопротивления формы ножа с прямым обухом (при отсутствии грани EJ) выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_0^{h_m} \int_0^{l_k} (g'(y) \cdot p_2(y)) dz dy + \int_0^{h_m} \int_0^{l_k} (s_2(y)) dz dy + \frac{1}{2 \cdot E_0} \cdot [p^2(0) - p^2(L)] = \\ &= \int_0^{h_m} \int_0^{l_k} (g'(y) \cdot p_2(y)) dz dy + \int_0^{\delta} \int_0^{l_k} (s_2(x)) dz dx + \frac{1}{2 \cdot E_0} \cdot [p^2(0) - p^2(L)] = \\ &= l_k \cdot \left(\int_0^{h_m} g'(y) \cdot p_2(y) dy + \int_0^{h_m} (s_2(y)) dy + \frac{1}{2 \cdot E_0} \cdot [p^2(0) - p^2(L)] \right) = \\ &= l_k \cdot \left(\int_0^{h_m} (\operatorname{tg} \alpha \cdot p_2(y)) dy + \int_0^{h_m} (s_2(y)) dy \right). \end{aligned} \tag{7}$$

В результате преобразований имеем

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{l_k \cdot \xi \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}{l} \cdot \left\{ \frac{h_m^2}{2} + \frac{\xi \cdot \eta \cdot v}{E_1^2} \cdot \left(h_m + \frac{1 - \exp(k \cdot h_m)}{k} \right) \right\} + \\ &+ \frac{l_k \cdot \xi}{H} \cdot \left\{ h \cdot h_m - \frac{h_m^2}{2} + \frac{\xi \cdot \eta \cdot v}{E_1^2} \cdot \left(h_m + \frac{\exp[k \cdot (h - h_m)] - \exp[k \cdot h]}{k} \right) \right\}. \end{aligned} \tag{8}$$

Выражение для силы сопротивления формы двухромбического ножа с задними наклонными гранями

$$\begin{aligned} \hat{F}_1 &= \frac{l_k \cdot \xi \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}{l} \cdot \left\{ \frac{h_m^2}{2} + \frac{\xi \cdot \eta \cdot v}{E_1^2} \cdot \left(h_m + \frac{1 - \exp(k \cdot h_m)}{k} \right) \right\} - \\ &- \frac{l_k \cdot \xi \cdot \operatorname{tg}^2 \beta}{l} \cdot \left\{ \frac{h_p \cdot (\tau - 1) - \frac{e_{01}}{k} + L}{k} \cdot (\exp(k \cdot [y_G - L]) - 1) + \left(h_p + \frac{e_{01}}{k} \right) \cdot (y_G - L) - \frac{y_G^2 - L^2}{2} \right\} + \\ &+ \frac{l_k \cdot \xi}{H} \cdot \left\{ h \cdot h_m - \frac{h_m^2}{2} + \frac{\xi \cdot \eta \cdot v}{E_1^2} \cdot \left(h_m + \frac{\exp[k \cdot (h - h_m)] - \exp[k \cdot h]}{k} \right) \right\}. \end{aligned} \tag{9}$$

Отметим, что выражение (9) справедливо при $h \in (h_m, H)$. Выражение для силы сопротивления формы ножа без боковых граней выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1 &= \frac{l_k \cdot \xi \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}{l} \cdot \left\{ \frac{h_m^2}{2} + \frac{\xi \cdot \eta \cdot v}{E_1^2} \cdot \left(h_m + \frac{1 - \exp(k \cdot h_m)}{k} \right) \right\} - \\ &- \frac{l_k \cdot \xi \cdot \operatorname{tg}^2 \beta}{l} \cdot \left\{ \frac{h_p \cdot \chi - \frac{e_{01}}{k} + h_m}{k} \cdot (\exp(k \cdot [\tilde{y}_G - h_m]) - 1) + \left(h_p + \frac{e_{01}}{k} \right) \cdot (\tilde{y}_G - h_m) - \frac{\tilde{y}_G^2 - h_m^2}{2} \right\} + \\ &+ \frac{l_k \cdot \xi}{H} \cdot \left\{ h \cdot h_m - \frac{h_m^2}{2} + \frac{\xi \cdot \eta \cdot v}{E_1^2} \cdot \left(h_m + \frac{\exp[k \cdot (h - h_m)] - \exp[k \cdot h]}{k} \right) \right\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Из выражений (8)–(10) следует, что на силу сопротивления формы влияют скорость и геометрия ножа, реологические характеристики рыбы, а также глубина погружения режущей кромки в материал. Введем безразмерные величины: скорость \bar{v} , глубину погружения \bar{h} и высоту образца материала \bar{H} и выполним следующие преобразования.

$$v = \bar{v} \cdot \frac{h_m \cdot (E_0 + E_1)}{\eta}; k = -\frac{E_0 + E_1}{\eta \cdot v} = -\frac{1}{\bar{v} \cdot h_m}; \mu = 1 - \exp\left(\frac{k \cdot \delta}{\text{tg}\alpha}\right) = 1 - \exp\left(\frac{-1}{\bar{v}}\right); h_p = h_m \cdot t_{\text{аф}}; e_{01} = E_0/E_1;$$

$$\frac{e_{01}}{k} = -e_{01} \cdot \bar{v} \cdot h_m; \bar{h} = h/h_m; \bar{H} = H/l; F_0 = (\delta^2 \cdot \xi \cdot l_k)/l; \bar{y} = y/l;$$

$$\frac{\xi \cdot \eta \cdot v}{E_1^2} = \bar{v} \cdot h_m \cdot e_{01}; \chi = \frac{\xi \cdot \eta \cdot v \cdot \mu}{E_1^2 \cdot \delta / \text{tg}\alpha} = \bar{v} \cdot e_{01} \cdot \left[1 - \exp\left(\frac{-1}{\bar{v}}\right)\right];$$

$$\tau = 1 + \chi \cdot \exp(k \cdot R) = 1 + \bar{v} \cdot e_{01} \cdot \left[1 - \exp\left(\frac{-1}{\bar{v}}\right)\right] \cdot \exp\left(-\frac{R_0}{\bar{v}}\right); R_0 = \frac{R}{h_m};$$

$$(1 - \tau) = \bar{v} \cdot e_{01} \cdot \left[\exp\left(\frac{-1}{\bar{v}}\right) - 1\right] \cdot \exp\left(-\frac{R_0}{\bar{v}}\right);$$

$$\frac{\xi \cdot h \cdot h_m \cdot l_k}{H} + \frac{\xi^2 \cdot \eta \cdot v \cdot h_m \cdot l_k}{E_1^2 \cdot H} - \frac{l \xi \cdot h_m^2 \cdot l_k}{2 \cdot H} + \frac{\xi^2 \cdot \eta \cdot v \cdot l_k}{E_1^2 \cdot H \cdot k} \cdot (\exp[k \cdot (h - h_m)] - \exp[k \cdot h]) =$$

$$= \frac{\delta^2 \cdot \xi \cdot l_k}{l} \cdot \left\{ \frac{\bar{h} + \bar{v} \cdot e_{01}}{\bar{H} \cdot \text{tg}^2 \alpha} - \frac{1}{2 \cdot \bar{H} \cdot \text{tg}^2 \alpha} - \frac{\bar{v} \cdot e_{01} \cdot \bar{v}}{\bar{H} \cdot \text{tg}^2 \alpha} \cdot \left(\exp\left[\left(\frac{1 - \bar{h}}{\bar{v}}\right)\right] - \exp\left[\left(-\frac{\bar{h}}{\bar{v}}\right)\right] \right) \right\} =$$

$$= \frac{\delta^2 \cdot \xi \cdot l_k}{l} \cdot \frac{1}{\bar{H} \cdot \text{tg}^2 \alpha} \cdot \left\{ \bar{h} - 0,5 + \bar{v} \cdot e_{01} \cdot \left[1 - \bar{v} \cdot \left(\exp\left[\frac{1 - \bar{h}}{\bar{v}}\right] - \exp\left[-\frac{\bar{h}}{\bar{v}}\right] \right) \right] \right\}.$$

В результате преобразований получим выражение для безразмерной силы сопротивления формы однокромочного ножа

$$\bar{F}_1 = F_1/F_0 = [0,5 + \bar{v} \cdot e_{01} \cdot (1 + (\exp(-1/\bar{v}) - 1) \cdot \bar{v})] +$$

$$+ \frac{1}{\bar{H} \cdot \text{tg}^2 \alpha} \cdot \left(\bar{h} - 0,5 + \bar{v} \cdot e_{01} \cdot \left\{ 1 - \bar{v} \cdot \left[\exp\left(\frac{1 - \bar{h}}{\bar{v}}\right) - \exp\left(-\frac{\bar{h}}{\bar{v}}\right) \right] \right\} \right). \tag{11}$$

Отметим, что выражение (11) справедливо при $\bar{h} \in (1, H/h_m)$. Выражение для безразмерной силы сопротивления формы двухкромочного ножа с задними наклонными гранями выглядит следующим образом

$$\bar{\hat{F}}_1 = \hat{F}/F_0 = [0,5 + \bar{v} \cdot e_{01} \cdot (1 + (\exp(-1/\bar{v}) - 1) \cdot \bar{v})] -$$

$$- \frac{1}{t_{\text{аф}}^2} \cdot \left\{ [t_{\text{аф}} \cdot (1 - \tau) - \bar{v} \cdot e_{01} - \bar{L}] \cdot \left(\exp\left(-\frac{\bar{y}_G - \bar{L}}{\bar{v}}\right) - 1 \right) \cdot \bar{v} + (t_{\text{аф}} - e_{01} \cdot \bar{v}) \cdot (\bar{y}_G - \bar{L}) - \frac{\bar{y}_G^2 - \bar{L}^2}{2} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{\bar{H} \cdot \text{tg}^2 \alpha} \cdot \left(\bar{h} - 0,5 + \bar{v} \cdot e_{01} \cdot \left\{ 1 - \bar{v} \cdot \left[\exp\left(\frac{1 - \bar{h}}{\bar{v}}\right) - \exp\left(-\frac{\bar{h}}{\bar{v}}\right) \right] \right\} \right). \tag{12}$$

Безразмерная сила сопротивления двухкромочного ножа без боковых граней

$$\bar{\tilde{F}}_1 = \tilde{F}/F_0 = [0,5 + \bar{v} \cdot e_{01} \cdot (1 + (\exp(-1/\bar{v}) - 1) \cdot \bar{v})] -$$

$$- \frac{1}{t_{\text{аф}}^2} \cdot \left\{ [t_{\text{аф}} \cdot (1 - \tilde{\tau}) - \bar{v} \cdot e_{01} - 1] \cdot \left(\exp\left(-\frac{\bar{y}_G - 1}{\bar{v}}\right) - 1 \right) \cdot \bar{v} + (t_{\text{аф}} - e_{01} \cdot \bar{v}) \cdot (\bar{y}_G - 1) - \frac{\bar{y}_G^2 - 1}{2} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{\bar{H} \cdot \text{tg}^2 \alpha} \cdot \left(\bar{h} - 0,5 + \bar{v} \cdot e_{01} \cdot \left\{ 1 - \bar{v} \cdot \left[\exp\left(\frac{1 - \bar{h}}{\bar{v}}\right) - \exp\left(-\frac{\bar{h}}{\bar{v}}\right) \right] \right\} \right). \tag{13}$$

Нетрудно убедиться, что угол ψ определяется следующим образом

$$\psi = \arctg \left[\frac{y \cdot \operatorname{tg} \alpha + \frac{(h-y) \cdot l}{H \cdot \operatorname{tg} \alpha} + \frac{\xi \cdot \eta \cdot v}{E_1^2} \cdot \left\{ \operatorname{tg} \alpha \cdot (1 - \exp(k \cdot y)) + \frac{l}{H \cdot \operatorname{tg} \alpha} \cdot (1 - \exp[k \cdot (h-y)]) \right\}}{y + \frac{\xi \cdot \eta \cdot v}{E_1^2} \cdot (1 - \exp(k \cdot y))} \right] - \alpha \quad (14)$$

$$\psi = \arctg \left[\frac{\bar{y} \cdot \operatorname{tg} \alpha + \frac{(\bar{h} - \bar{y})}{\bar{H} \cdot \operatorname{tg} \alpha} + \bar{v} \cdot e_{01} \cdot \left\{ \operatorname{tg} \alpha \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{\bar{y}}{\bar{v}}\right) \right) + \frac{1}{\bar{H} \cdot \operatorname{tg} \alpha} \cdot \left(1 - \exp\left[\frac{(\bar{y} - \bar{h})}{\bar{v}}\right] \right) \right\}}{\bar{y} + \bar{v} \cdot e_{01} \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{\bar{y}}{\bar{v}}\right) \right)} \right] - \alpha \quad (15)$$

Результаты моделирования

Разработанные математические модели (11)–(13) позволяют варьировать безразмерной скоростью, безразмерной высотой образца материала и реологической характеристикой материала для исследования зависимостей безразмерных сил сопротивления формы от безразмерной скорости и безразмерной глубины погружения ножа в материал. Ниже приведены результаты математического моделирования безразмерных сил сопротивления формы однокромочного ножа с прямым обухом и двухкромочных ножей. На рисунках 2 и 3 показаны зависимости безразмерной силы сопротивления формы однокромочного ножа с прямым обухом от безразмерной глубины погружения режущей кромки в материал при различных значениях безразмерной высоты образца материала, безразмерной скорости и меры эластичности материала. На рисунке 4 изображены зависимости безразмерной силы сопротивления формы однокромочного ножа с прямым обухом от безразмерной глубины погружения режущей кромки и безразмерной скорости резания, на рисунке 5 – от безразмерной глубины погружения режущей кромки и меры эластичности. На рисунке 6 приведены зависимости безразмерной силы сопротивления формы двухкромочного ножа с боковыми гранями от безразмерной глубины погружения режущей кромки и безразмерной скорости резания, на рисунке 7 – от безразмерной глубины погружения и меры эластичности материала. На рисунке 8 для трех видов ножей изображены зависимости безразмерных сил сопротивления формы от безразмерной скорости резания, на рисунках 9 и 10 – зависимости безразмерных сил от безразмерной глубины погружения режущей кромки в материал.

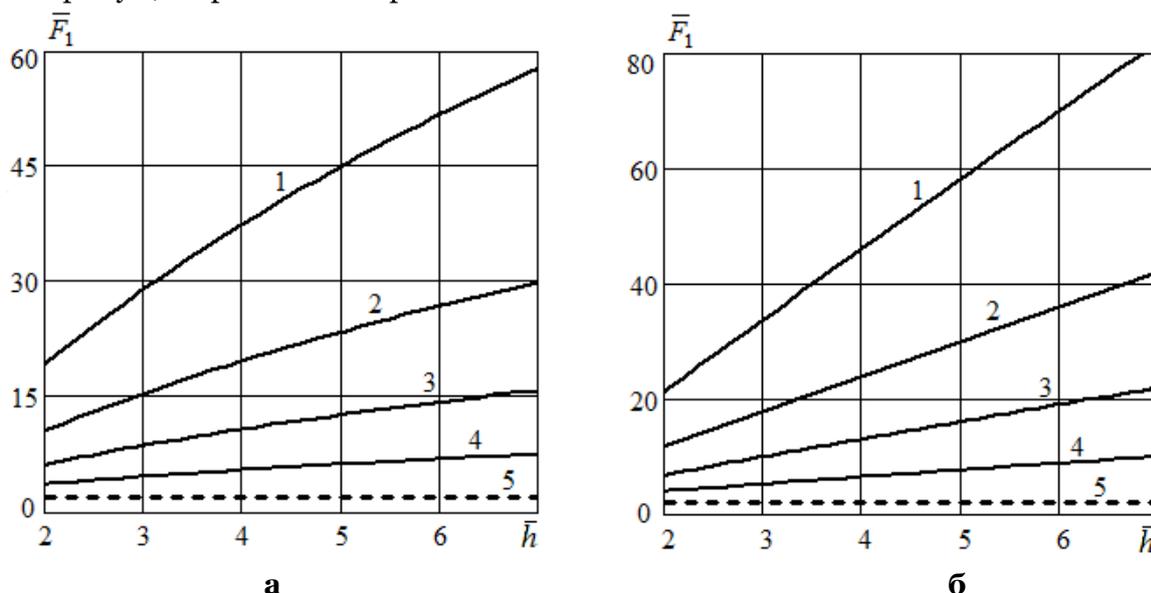


Рисунок 2 – Зависимость безразмерной силы сопротивления формы однокромочного ножа с прямым обухом от безразмерной глубины погружения режущей кромки в материал ($e_{01} = 3$; $\alpha = 10^\circ$)

Figure 2. The dependence of dimensionless resistance force of double-edge knife profile with side edges on the dimensionless immersion depth of the blade ($e_{01} = 3$; $\alpha = 10^\circ$)

- а: $\bar{v} = 5$; 1 - $\bar{H} = 10$; 2 - $\bar{H} = 20$; 3 - $\bar{H} = 40$; 4 - $\bar{H} = 100$; 5 - $\bar{H} \rightarrow \infty$;
 б: $\bar{v} = 50$; 1 - $\bar{H} = 10$; 2 - $\bar{H} = 20$; 3 - $\bar{H} = 40$; 4 - $\bar{H} = 100$; 5 - $\bar{H} \rightarrow \infty$

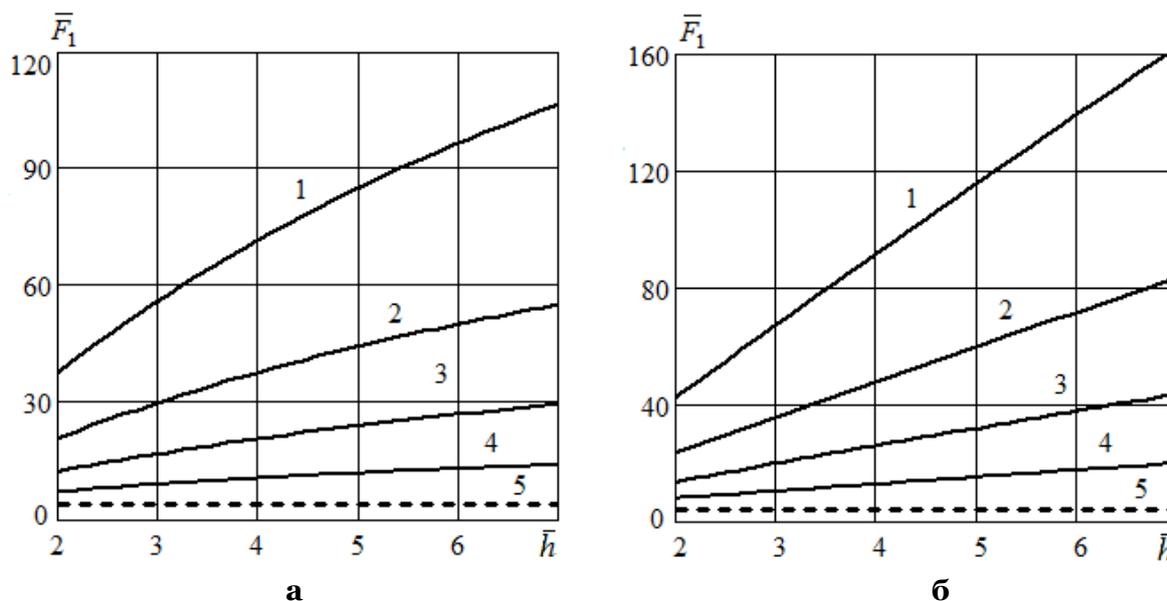


Рисунок 3 – Зависимость безразмерной силы сопротивления формы однокромочного ножа с прямым обухом от безразмерной глубины погружения режущей кромки в материал ($e_{01} = 7$; $\alpha = 10^\circ$)

Figure 3. The dependence of dimensionless resistance force of double-edge knife profile with side edges on the dimensionless immersion depth of the blade ($e_{01} = 7$; $\alpha = 10^\circ$)

а: $\bar{v} = 5$; 1 – $\bar{H} = 10$; 2 – $\bar{H} = 20$; 3 – $\bar{H} = 40$; 4 – $\bar{H} = 100$; 5 – $\bar{H} \rightarrow \infty$;
 б: $\bar{v} = 50$; 1 – $\bar{H} = 10$; 2 – $\bar{H} = 20$; 3 – $\bar{H} = 40$; 4 – $\bar{H} = 100$; 5 – $\bar{H} \rightarrow \infty$

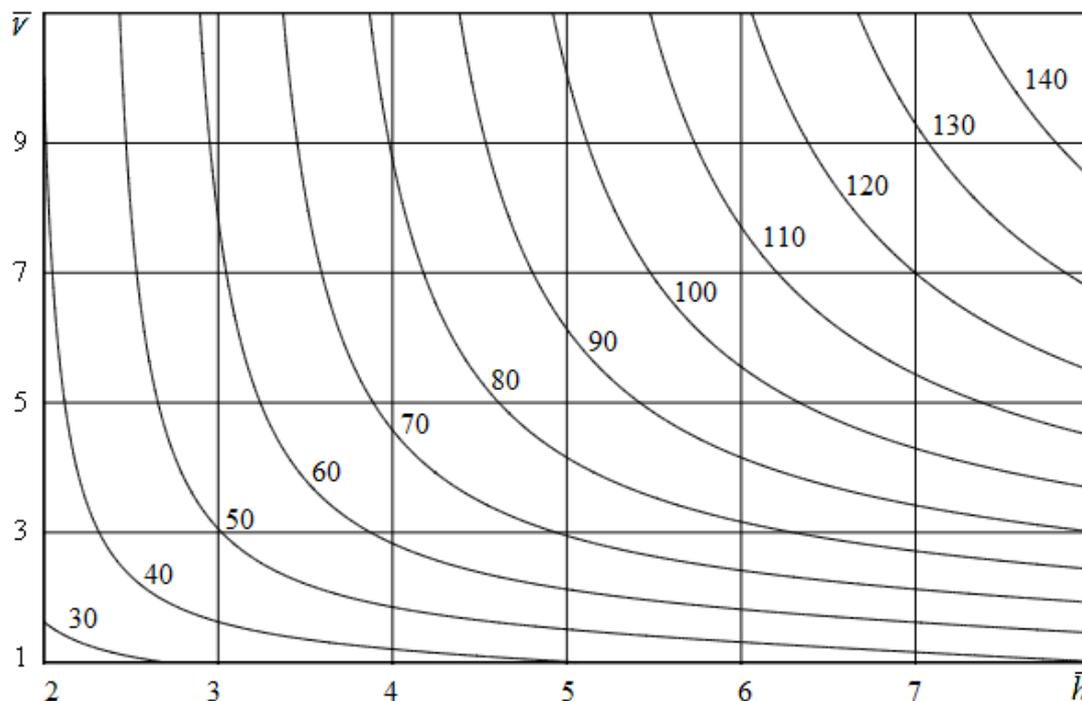


Рисунок 4 – Зависимость безразмерной силы сопротивления формы однокромочного ножа с прямым обухом от безразмерной глубины погружения режущей кромки в материал и безразмерной скорости резания
 Figure 4. The dependence of dimensionless resistance force of double-edge knife profile with side edges on the dimensionless immersion depth of the blade and the dimensionless cutting speed
 ($\bar{H} = 10$; $e_{01} = 7$; $\alpha = 10^\circ$)

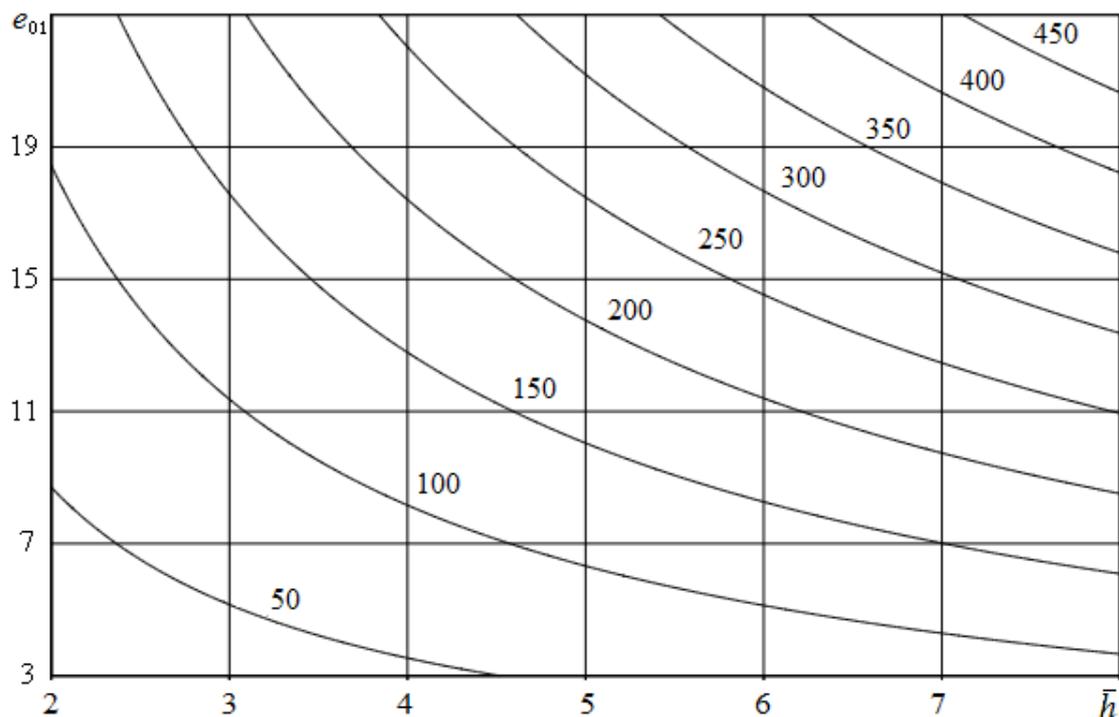


Рисунок 5 – Зависимость безразмерной силы сопротивления формы однокромочного ножа с прямым обухом от безразмерной глубины погружения режущей кромки в материал и меры эластичности материала
 Figure 5. The dependence of dimensionless resistance force of flat back-edged knife profile on the dimensionless immersion depth of the blade and the elasticity of the material
 ($\bar{H} = 10$; $\bar{\nu} = 20$; $\alpha = 10^\circ$)

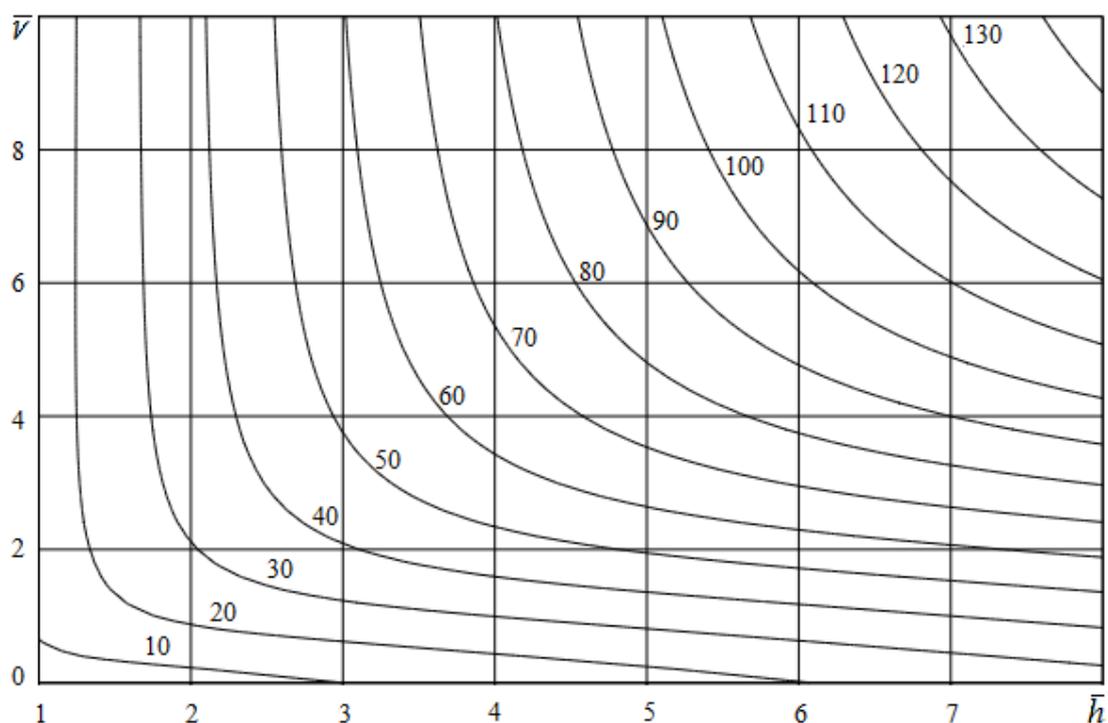


Рисунок 6 – Зависимость безразмерной силы сопротивления формы двухкромочного ножа с боковыми гранями от безразмерной глубины погружения режущей кромки в материал и безразмерной скорости резания
 Figure 6. The dependence of dimensionless resistance force of double-edged knife profile with side edges on the dimensionless immersion depth of the blade and the dimensionless cutting speed
 ($\bar{H} = 10$; $e_{01} = 7$; $\alpha = 10^\circ$; $\bar{L} = 3$)

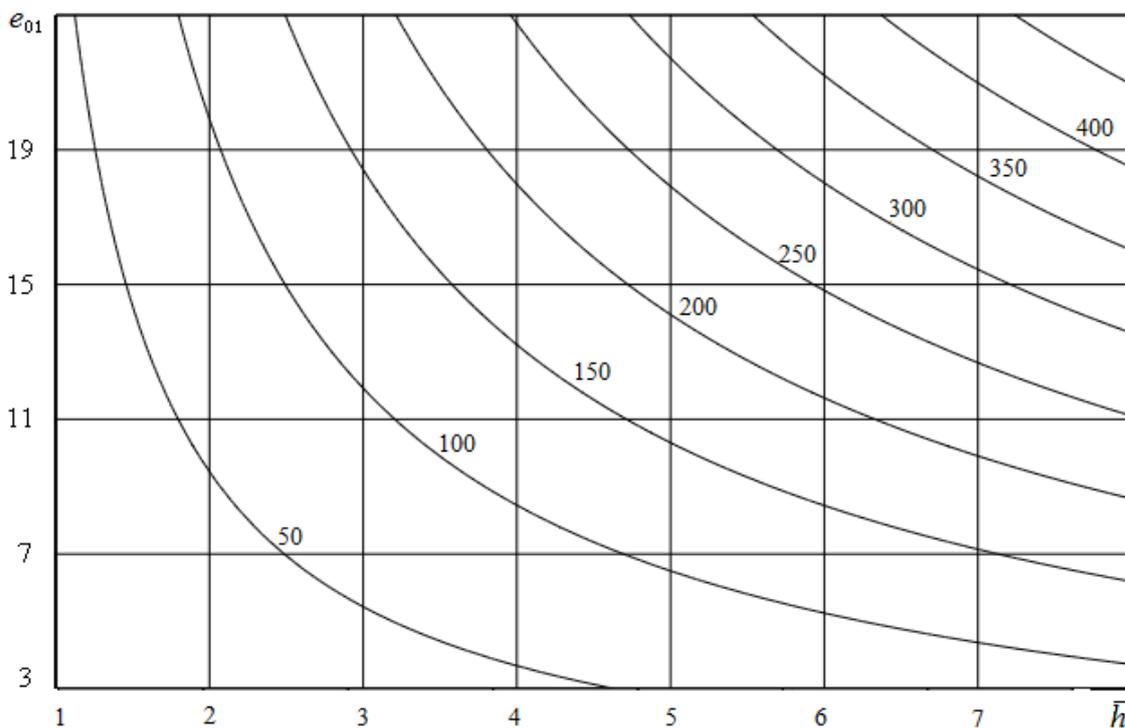


Рисунок 7 – Зависимость безразмерной силы сопротивления формы двухкромочного ножа с боковыми гранями от безразмерной глубины погружения режущей кромки в материал и меры эластичности материала
 Figure 7. The dependence of dimensionless resistance force of double-edged knife profile with side edges on the dimensionless immersion depth of the blade and the elasticity of the material
 ($\bar{H} = 10$; $\bar{v} = 20$; $\alpha = 10^\circ$; $\bar{L} = 3$)

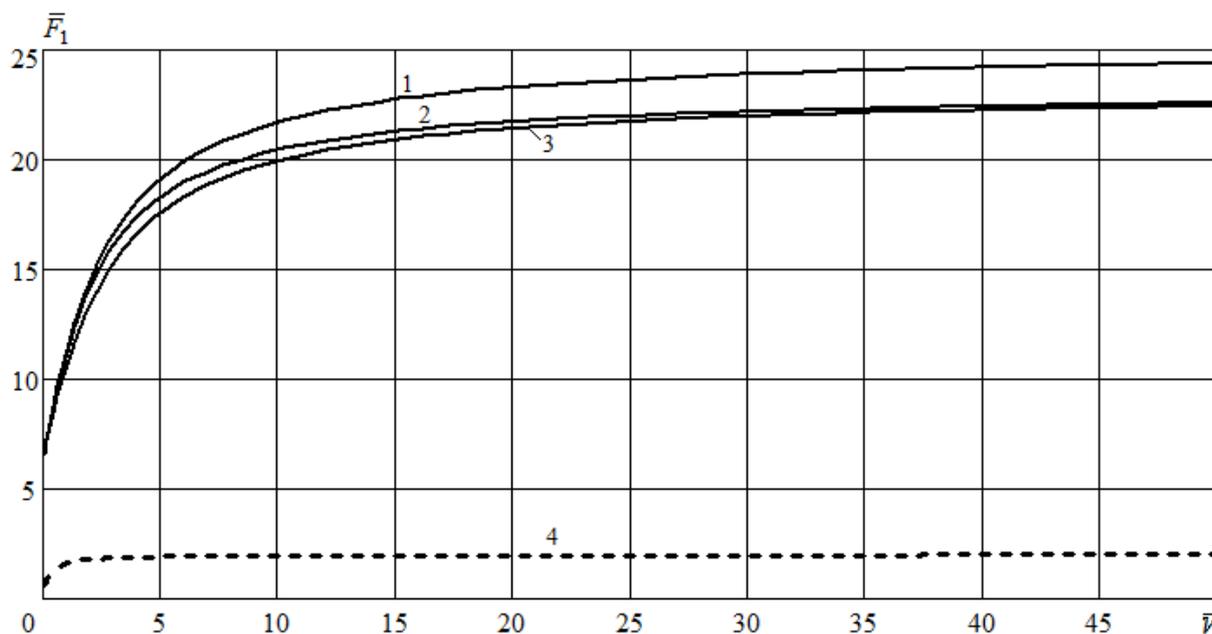


Рисунок 8 – Зависимость безразмерных сил сопротивления формы от безразмерной скорости резания
 Figure 8. The dependence of dimensionless knife profile resistance force on the dimensionless cutting speed
 ($\bar{h} = 5$; $t_{af} = 0,8$; $e_{01} = 3$; $\bar{H} = 25$; $\bar{L}_0 = 3$; $\bar{L}_1 = 1$): 1 - \bar{F}_1 ; 2 - $\hat{\bar{F}}_1$; 3 - $\bar{\bar{F}}_1$; 4 - \bar{F}_1 при $\bar{H} \rightarrow \infty$

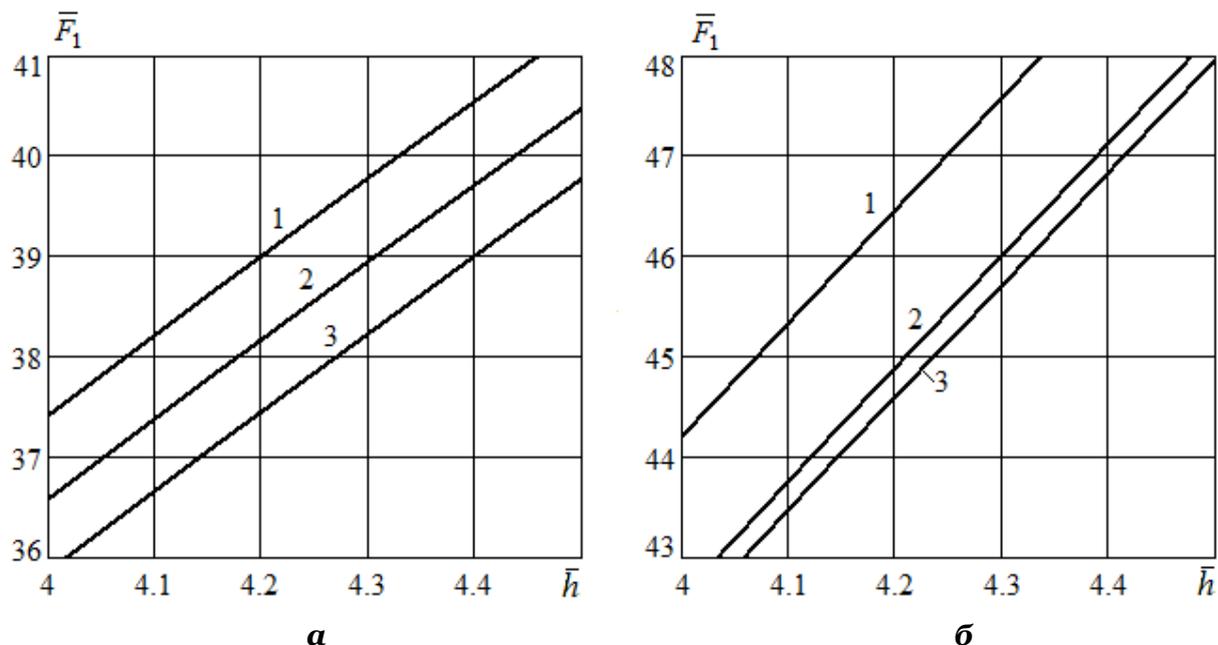


Рисунок 9 – Зависимость безразмерных сил сопротивления формы от безразмерной глубины погружения режущей кромки в материал

Figure 9. The dependence of dimensionless knife profile resistance force on the dimensionless immersion depth of the blade

$$(t_{\text{оф}} = 0,8; e_{01} = 3; \bar{H} = 10; \bar{L}_0 = 3; \bar{L}_1 = 1)$$

$$\mathbf{a}: \bar{v} = 5; 1 - \bar{F}_1, 2 - \hat{\bar{F}}_1, 3 - \bar{\bar{F}}_1; \mathbf{б}: \bar{v} = 20; 1 - \bar{F}_1, 2 - \hat{\bar{F}}_1, 3 - \bar{\bar{F}}_1$$

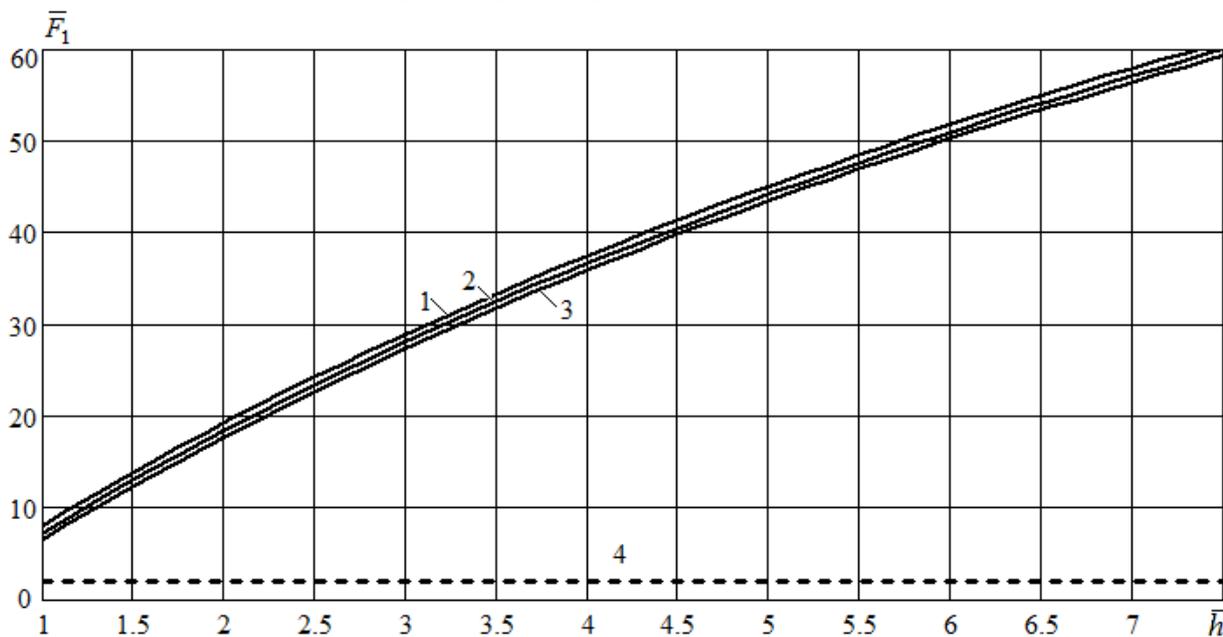


Рисунок 10 – Зависимость безразмерных сил сопротивления формы от безразмерной глубины погружения режущей кромки в материал

Figure 10. The dependence of dimensionless knife profile resistance force on the dimensionless immersion depth of the blade

$$(\bar{v} = 5; t_{\text{оф}} = 0,8; e_{01} = 3; \bar{H} = 10; \bar{L}_0 = 3; \bar{L}_1 = 1): 1 - \bar{F}_1; 2 - \hat{\bar{F}}_1; 3 - \bar{\bar{F}}_1; 4 - \bar{F}_1 \text{ при } \bar{H} \rightarrow \infty$$

Обсуждение результатов

Рисунок 2 демонстрирует, что по мере погружения в материал режущей кромки ножа с прямым обухом безразмерная сила сопротивления формы строго монотонно возрастает. При увеличении безразмерной высоты разрезаемого образца указанная сила существенно снижается вследствие сокращения относительной деформации сжатия вертикальных элементарных волокон. При снижении безразмерная сила стремится к минимальному значению, которое соответствует отсутствию относительной деформации материала в направлении резания ($\bar{H} \rightarrow \infty$). При увеличении

безразмерной скорости ножа безразмерная сила сопротивления заметно возрастает. Рисунок 3 показывает, что при увеличении меры эластичности материала указанная сила также существенно повышается. Контурные графики на рисунках 4 и 5 иллюстрируют, что безразмерная сила монотонно возрастает при увеличении безразмерных параметров: глубины погружения ножа в материал, скорости резания и меры эластичности мышечной ткани. При этом с ростом безразмерной глубины погружения зависимости указанной силы от безразмерной скорости и меры эластичности усиливаются. При повышении безразмерной скорости на определенной безразмерной глубине погружения ножа безразмерная сила стремится к предельному значению. При значениях безразмерной высоты образца материала 10, меры эластичности материала 7, половинного угла заточки однокромочного ножа 10 и безразмерной глубины погружения 4; 5; 6; 7 предел безразмерной силы составляет 94,01; 119,71; 145,40; 171,09 соответственно.

Как показывает рисунок 6, с увеличением безразмерной скорости на определенной безразмерной глубине погружения ножа сила сопротивления формы двухкромочного ножа монотонно возрастает и стремится к предельному значению. При значениях безразмерной высоты образца материала 10, меры эластичности материала 7, половинного угла заточки двухкромочного ножа 10, безразмерной высоты ножа 3 и безразмерной глубины погружения 4; 5; 6; 7 предел безразмерной силы составляет 90,02; 115,72; 141,41; 167,10 соответственно. В то же время, как показано выше, при отсутствии деформирования материала в направлении резания ($\bar{N} \rightarrow \infty$) с ростом скорости соответствующая сила сопротивления изменяется немонотонно и стремится к нулевому значению. Рисунок 7 иллюстрирует монотонное увеличение безразмерной силы сопротивления формы двухкромочного ножа с повышением меры эластичности материала.

Рисунок 8 иллюстрирует, что с увеличением безразмерной скорости резания безразмерные силы сопротивления формы трех видов ножей монотонно возрастают и стремятся к соответствующим предельным значениям. При значениях безразмерной глубины погружения 5, безразмерной высоты образца материала 25, меры эластичности материала 3, отношения тангенсов половинных углов заточки двухкромочных ножей 0,8, безразмерной высоты ножа с боковыми гранями 3; пределы безразмерных сил сопротивления формы однокромочного ножа, двухкромочных ножей с боковыми гранями и без них составляют 25,144; 23,148; 23,145 соответственно, в то время как безразмерная сила сопротивления формы однокромочного ножа при отсутствии стесненного сжатия материала по направлению резания составляет 2,0.

Таким образом, как видно из результатов моделирования на рисунках 6–8, процесс резания рыбы при условии стесненного сжатия материала по направлению резания существенно отличается от процесса резания без стесненного сжатия вертикальных волокон. Силы сопротивления формы, обусловленные сжатием горизонтальных волокон материала по оси Ox , много меньше сил сопротивления, обусловленных сжатием вертикальных волокон по оси Oy (рисунок 1).

Рисунок 9 демонстрирует, что для трех видов ножей увеличение безразмерной глубины погружения приводит к монотонному повышению безразмерной силы. При этом наибольшая безразмерная сила сопротивления формы возникает при резании ножом с прямым обухом, а наименьшая сила соответствует двухкромочному ножу без боковых граней. В то же время, как показывает рисунок 10, в случае стесненного сжатия материала по направлению резания величины сил сопротивления почти на порядок превышают соответствующие значения сил, возникающих при отсутствии стесненного сжатия вертикальных волокон. При этом разности значений сил для трех рассмотренных видов ножей с увеличением безразмерной глубины погружения становятся много меньше абсолютных величин указанных сил. При значениях безразмерной глубины погружения лезвия 7, безразмерной скорости 5, безразмерной высоты образца материала 10, меры эластичности материала 3, отношения тангенсов половинных углов заточки двухкромочных ножей 0,8, безразмерной высоты ножа с боковыми гранями 3 безразмерные силы сопротивления однокромочного ножа и двухкромочных ножей составляют 57,89; 57,05; 56,34 соответственно, в то время как безразмерная сила сопротивления формы однокромочного ножа при отсутствии стесненного сжатия материала по направлению резания составляет 1,91.

Заключение

Размерная сила сопротивления формы ножа существенно зависит от реологических свойств рыбы – модулей упругости и коэффициента динамической вязкости. Влияние на указанную силу оказывают геометрия ножа, глубина погружения лезвия в материал и скорость резания. Половинные углы заточки передней и задней наклонных граней заметно влияют на размерную силу, что обуславливает целесообразность постановки и решения задачи оптимизации профиля ножа по критерию минимальной силы вредного сопротивления. Половинная толщина ножа влияет на мгновенно-упругую и высокоэластичную составляющие силы сопротивления материала.

Отсутствие у ножа боковых граней снижает потери вязкоупругой энергии при релаксации напряжений, что приводит к сокращению силы сопротивления формы. Данный результат позволяет заключить, что для ножей с прямыми гранями при прочих равных условиях наименьшие затраты энергии на резание обеспечиваются при резании двухкромочным ножом без боковых граней, профиль которого представляет собой четырехугольник. Это также сопровождается снижением сил трения, обусловленных шероховатостью граней ножа и адгезионным взаимодействием. Стремление к сокращению боковых граней ножей подтверждается современными тенденциями при разработке рабочих органов зарубежных филетировочных машин [1].

Процесс резания рыбы при условии деформирования материала по направлению резания существенно отличается от процесса резания без стесненного сжатия вертикальных волокон мышечной ткани. При этом величины сил сопротивления почти на порядок превышают соответствующие значения сил, возникающих при отсутствии деформирования материала по направлению резания. С ростом безразмерной глубины погружения разности значений сил для трех рассмотренных видов ножей становятся много меньше абсолютных величин сил сопротивления. Таким образом, в соответствии с предложенной моделью процесса основной вклад во вредное сопротивление вносит составляющая силы, обусловленная относительной деформацией материала по направлению резания.

Основное направление дальнейших исследований следующее: математическое моделирование деформационных сил трения на гранях ножа.

Литература

1. Агеев О.В., Фатыхов Ю.А. Совершенствование технологического оборудования для первичной обработки рыбы: опыт, проблематика, системный подход. Калининград: Изд-во Калининград. гос. техн. ун-та. 2015. 261 с.
2. Агеев О.В., Наумов В.А., Фатыхов Ю.А., Самойлова Н.В. Математическое моделирование сил нормального контактного давления на наклонные грани ножа при резании рыбы // Известия Калининградского государственного технического университета. 2017. № 47. С. 80–96.
3. Dowgiallo A. Cutting force of fibrous materials. *Journal of Food Engineering*. 2005, no. 66, pp. 57–61.
4. Boisly M., Schuldt S., Kaestner M.G., Schneider Y., Rohm H. Experimental characterisation and numerical modelling of cutting processes in viscoelastic solids. *Journal of Food Engineering*. 2016, no. 191, pp. 1–9.
5. Schuldt S., Arnold G., Kowalewski J., Schneider Y., Rohm H. Analysis of the sharpness of blades for food cutting. *Journal of Food Engineering*. 2016, no. 188, pp. 13–20.
6. Schuldt S., Schneider Y., Rohm H. High-speed cutting of foods: Cutting behavior and initial cutting forces. *Journal of Food Engineering*. 2018, no. 230, pp. 55–62.
7. Pagani M., Perego U. Explicit dynamics simulation of blade cutting of thin elastoplastic shells using «directional» cohesive elements in solid-shell finite element models. *Computer methods in applied Mechanics and Engineering*. 2015, no. 285, pp. 515–541.
8. Atkins T. Optimum blade configurations for the cutting of soft solids. *Engineering Fracture Mechanics*. 2006, no. 73, pp. 2523–2531.
9. Atkins T. Prediction of sticking and sliding lengths on the rake faces of tools using cutting forces. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2015, no. 91, pp. 33–45.
10. Агеев О.В., Фатыхов Ю.А., Самойлова Н.В. Выбор и идентификация реологической модели структурно-механических свойств мышечной ткани рыбы // Известия Калининградского государственного технического университета. 2018. № 49. С. 75–91.

11. Ageev O.V., Naumov V.A., Fatykhov Yu.A., Samoilova N.V. Анализ соответствия реологических моделей структурно-механическим свойствам рыбы // Научный журнал НИУ ИТМО. Серия: Процессы и аппараты пищевых производств. 2018. № 2(36). С. 34–43.
12. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
13. Popov V.L. *Contact Mechanics and Friction. Physical Principles and Applications*. Berlin, Springer-Verlag GmbH, 2017. 391 p.
14. Солдатенков И.А. К расчету деформационной составляющей силы трения для стандартного вязкоупругого основания // Трение и износ. 2008. Том 29. № 1. С. 12–21.
15. Солдатенков И.А. Расчет трения индентора с фрактальной шероховатостью о вязкоупругое основание // Трение и износ. 2015. Том 36. № 3. С. 257–262.
16. Ageev O.V., Naumov V.A., Fatykhov Yu.A. Математическое моделирование сил нормального контактного давления на боковые грани ножа при резании пищевых материалов // Научный журнал НИУ ИТМО Серия: Процессы и аппараты пищевых производств. 2017. № 4. С. 27–42.
17. Ageev O.V., Naumov V.A., Fatykhov Yu.A., Samoilova N.V. Математическое моделирование сил нормального контактного давления на грани двухромбического ножа при резании рыбы // Известия Калининградского государственного технического университета. 2018. № 50. С. 81–102.

References

1. Ageev O.V., Fatykhov Yu.A. *Sovershenstvovanie tekhnologicheskogo oborudovaniya dlya pervichnoi obrabotki ryby: opyt, problematika, sistemnyi podkhod* [Perfection of technological equipment for primary fish processing: experience, problems, system approach]. Kaliningrad, Kaliningrad St. Tech. University Publ., 2015. 261 с.
2. Ageev O.V., Naumov V.A., Fatykhov Yu.A., Samoilova N.V. Matematicheskoe modelirovanie sil normal'nogo kontaktnogo davleniya na naklonnye grani nozha pri rezanii ryby [Mathematical simulation of forces of normal contact pressure of inclined knife edges during fish processing]. *Kaliningrad St. Tech. University News*, 2017, no. 47, pp. 80–96.
3. Dowgiallo A. Cutting force of fibrous materials. *Journal of Food Engineering*. 2005, no. 66, pp. 57–61.
4. Boisly M., Schuldt S., Kaestner M.G., Schneider Y., Rohm H. Experimental characterisation and numerical modelling of cutting processes in viscoelastic solids. *Journal of Food Engineering*. 2016, no. 191, pp. 1–9.
5. Schuldt S., Arnold G., Kowalewski J., Schneider Y., Rohm H. Analysis of the sharpness of blades for food cutting. *Journal of Food Engineering*. 2016, no. 188, pp. 13–20.
6. Schuldt S., Schneider Y., Rohm H. High-speed cutting of foods: Cutting behavior and initial cutting forces. *Journal of Food Engineering*. 2018, no. 230, pp. 55–62.
7. Pagani M., Perego U. Explicit dynamics simulation of blade cutting of thin elastoplastic shells using «directional» cohesive elements in solid-shell finite element models. *Computer methods in applied Mechanics and Engineering*. 2015, no. 285, pp. 515–541.
8. Atkins T. Optimum blade configurations for the cutting of soft solids. *Engineering Fracture Mechanics*. 2006, no. 73, pp. 2523–2531.
9. Atkins T. Prediction of sticking and sliding lengths on the rake faces of tools using cutting forces. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2015, no. 91, pp. 33–45.
10. Ageev O.V., Fatykhov Yu.A., Samoilova N.V. Vybór i identifikaciya reologicheskoy modeli strukturno-mekhanicheskikh svoystv myshechnoy tkani ryby [Selection and identification of rheological model of the structural-mechanical properties of muscular fish tissue]. *Kaliningrad St. Tech. University News*. 2018, no. 49, pp. 75–91.
11. Ageev O.V., Naumov V.A., Fatykhov Yu.A., Samoilova N.V. Analiz sootvetstviya reologicheskikh modeley strukturno-mekhanicheskikh svoystvam ryby [Correspondence of rheological models to the structural-mechanical properties of fish]. *Processes and Food Production Equipment*. 2018, no. 2(36), pp. 34–43.
12. Goriacheva I.G. *Mekhanika frikcionnogo vzaimodejstviya* [Mechanics of frictional interaction]. Moscow, Nauka Publ., 2001, 478 p.
13. Popov V.L. *Contact Mechanics and Friction. Physical Principles and Applications*. Berlin, Springer-Verlag GmbH, 2017, 391 p.
14. Soldatenkov I.A. K raschetu deformatsionnoj sostavljajushhej sily treniya dlja standartnogo vjzkouprugogo osnovaniya [To calculation of the deformation component of the friction force for a standard viscoelastic base]. *Friction and wear*. 2008, V. 29, no. 1, pp. 12–21.

15. Soldatenkov I.A. Raschet treniya indentora s fraktal'noy sherohovatost'yu o vyazkouprugoe osnovanie [Calculation of friction force for indenter with fractal roughness in sliding on viscoelastic foundation]. *Friction and wear*. 2015, V. 36, no. 3, pp. 257–262.
16. Ageev O.V., Naumov V.A., Fatykhov Yu.A. Matematicheskoe modelirovanie sil normal'nogo kontaktnogo davleniya na bokovye grani nozha pri rezanii pishchevyh materialov [Mathematical simulation of forces of normal contact pressure on side knife edges during cutting of food materials]. *Processes and Food Production Equipment*. 2017, no. 4(34), pp. 27–42.
17. Ageev O.V., Fatykhov Yu.A., SamoiloVA N.V. Matematicheskoe modelirovanie sil normal'nogo kontaktnogo davleniya na grani dvuhkromochnogo nozha pri rezanii ryby [Mathematical simulation of forces of normal contact pressure on the facets of double-edge knife during fish cutting]. *Kaliningrad St. Tech. University News*. 2018, no. 50, pp. 81–102.

Статья поступила в редакцию 25.02.2019