УДК 532.5.01

Применение уравнения бюргерса в качестве модельного уравнения динамики вязкой среды в канале

Канд. техн. наук **Зайцев А.В.** zai_@inbox.ru,
канд. физ.-мат. наук **Кудашов В.Н.** kdslv@mail.ru
Университет ИТМО
Институт холода и биотехнологий
921002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9

Расчет нестационарного течения вязкой жидкости в канале представляет собой сложную математическую задачу и производится обычно численными методами с применением вычислительной техники. Для исследования устойчивости и сходимости вычислительных алгоритмов предлагается использовать точные аналитические решения уравнения Бюргерса в качестве модельного уравнения динамики вязкой среды в канале.

Ключевые слова: динамика вязкой жидкости, уравнение Бюргерса, модельное уравнение, точное решение.

The use of burgers' equation as a model equation for the dynamics of viscous medium in a channel

Ph.D. **A.V. Zaitsev** zai_@inbox.ru,
Ph.D. **V.N. Kudashov** kdslv@mail.ru,
University ITMO
Institute of Refrigeration and Biotechnologies
191002, Russia, St. Petersburg, Lomonosov str., 9

Calculating the transient flow of viscous fluids in a pipe is a complex mathematical problem usually solved by computer-aided numerical techniques. Burgers' equation is offered as a tool for modelling the dynamics of viscous medium in a channel while studying convergence and stability of computing algorithms.

***Keywords*:** dynamics of viscous fluids, Burgers' equation, model equation, exact solution.

Решение сложной задачи нестационарного течения вязкой жидкости в канале с учетом реальных физических условий, таких, как зависимость теплофизических свойств от температуры, различные гидродинамические режимы течения, наличие объёмных сил и др. сводится к решению системы дифференциальных уравнений, в том числе уравнения Навье-Стокса с известными проблемами существования и гладкости решений. Основным встречающемся в литературных источниках методом решения различных задач при применении уравнений Навье-Стокса является конечно-разностная аппроксимация, например [1]. При этом главной проблемой является достижение устойчивости и сходимости. Известны условия сходимости, полученные для относительно простых задач. Однако при приближении постановки задачи к реальным условиям обеспечить сходимость возможно только в результате численного эксперимента на конкретной модели.

С этой целью предлагается применить методику численного исследования параметров сходимости и устойчивости выбираемых разностных схем. Для разработки такой методики следует иметь некое модельное уравнение и иметь его точное решение. Далее в качестве такого уравнения предлагается использовать уравнение Бюргерса, близкое по своему виду к стандартным уравнениям газовой динамики.

Запишем уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (1)$$

Здесь аналогами физических величин и функций процесса динамики вязких сред являются: u – скорость потока; t – время; x – координата вдоль потока; μ – вязкость.

Мы хотим построить решения уравнения Бюргерса при $x \in [0, L]$, $t \in [0, \infty)$, с граничными условиями

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, t \in [0, \infty). \qquad (2)$$

Для построения таких решений воспользуемся преобразованием Коула-Хопфа [2], сводящее нелинейное уравнение (1) к уравнению теплопроводности, являющемся линейным.

Пусть функция $v(x,t)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \mu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \qquad (3)$$

Тогда функция

$$u = -2\mu\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (4)$$

удовлетворяет уравнению Бюргерса. Преобразование (4) называется преобразованием Коула-Хопфа.

Чтобы найти решения уравнения (1) с граничными условиями (2), как видно из (4), достаточно найти функцию $v(x,t)$, при $x \in [0,L]$, $t \in [0,\infty)$, удовлетворяющую уравнению (3) и граничным условиям

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial v}{\partial x}(L,t) = 0, t \in [0,\infty). \tag{5}$$

При этом необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$v(x,t) \neq 0, \quad x \in [0,L], \quad t \in [0,\infty). \tag{6}$$

Используя метод Фурье (см. [3]) можно убедиться, что существует счётное множество функций, удовлетворяющих уравнению (3) и граничным условиям (5):

$$v_n(x,t) = \mathrm{e}^{-\mu\lambda_n^2 t}\cos(\lambda_n x), \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{L}, \quad n = 1, 2 ... \tag{7}$$

Так как $|v_n(x,t)| \leq 1$ при $t \geq 0$, то функции

$$\tilde{v}_n(x,t) = v_n(x,t) + C \tag{8}$$

являются решениями уравнения (3) с граничными условиями (5). Неравенство (6), очевидно, выполнено, если константа $C > 1$.

Так как $\partial v_n / \partial x = -\lambda_n \mathrm{e}^{-\mu\lambda_n^2 t}\sin(\lambda_n x)$, то из (4) получаем требуемые функции

$$u_n(x,t) = \frac{2\mu\lambda_n \mathrm{e}^{-\mu\lambda_n^2 t}\sin(\lambda_n x)}{\mathrm{e}^{-\mu\lambda_n^2 t}\cos(\lambda_n x) + C}.$$

Перепишем их в виде

$$u_n(x,t) = \frac{2\mu\lambda_n \sin(\lambda_n x)}{\cos(\lambda_n x) + C\,\mathrm{e}^{\mu\lambda_n^2 t}}, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{L}, \quad n = 1, 2 ... \tag{9}$$

Заметим, что *n*-ая функция $u_n(x,t)$ имеет ровно *n*–1 корней внутри интервала (0, *L*).

На рис. 1, 2 приведены графики первых двух функций распределения величин u_1 и u_2 вдоль координаты x в различные моменты времени при $\mu = 0{,}1,\ C = 1{,}5$.

Таким образом, в дальнейшем развитие методики численного исследования сходимости и устойчивости может быть основано на использовании для построения разностной модели исходного уравнения (1) с граничными условиями (2), а получаемое сеточное решение может оцениваться в сравнении с точным решением (9).

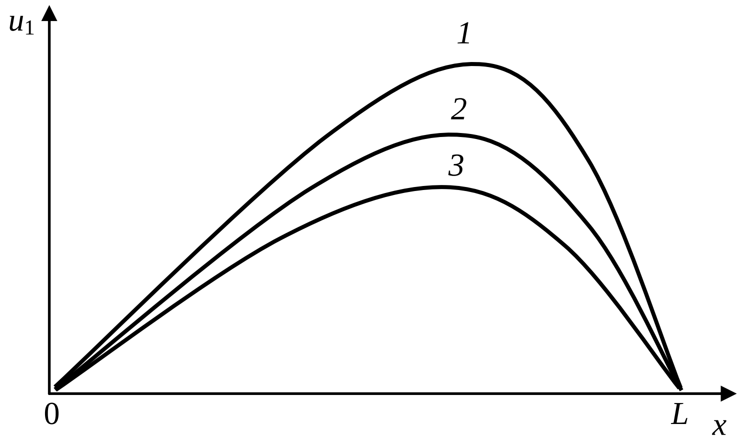

Рис. 1. Распределение u_1 вдоль x:
1 – t = 0,3; *2* – t = 0,5; *3* – t = 0,7

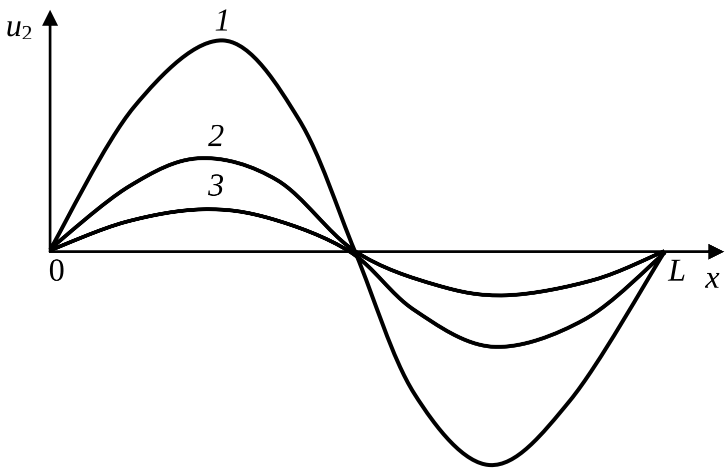

Рис. 2. Распределение u_2 вдоль x:
1 – t = 0,3; *2* – t = 0,5; *3* – t = 0,7

Список литературы

1. Зайцев А.В., Пеленко Ф.В. Моделирование течения вязкой жидкости в трубе // Процессы и аппараты пищевых производств. 2012. № 1.

2. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны: Пер. с англ. / Под. ред А.Б. Шабата. – М.: Мир, 1977. – 622 с.

3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988. – 512 с.