УДК 664

Теория регулярного режима в решениях задач нестационарного массопереноса в процессе сушки

Д-р техн. наук Фролов С.В.
д-р техн. наук Куцакова В.Е. vekprof@mail.ru
канд. техн. наук Шкотова Т.В. tatyanashkotova@yandex.ru

Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет ИТМО
Институт холода и биотехнологий
191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9

Предложено использование положений теории регулярного режима для решения задач нестационарного массопереноса в процессе сушки. До настоящего времени при ряде допущений были представлены лишь классические решения для тел простой формы. В тоже время пищевые продукты в большинстве являются телами сложной формы. В статье предложена формулировка и решение квазиодномерного дифференциального уравнения с соответствующими условиями однозначности. Показано, что в периоде постоянной скорости сушки уравнение переходит в разряд стационарных и его решение представляет параболический профиль влажности. Дано расчетное соотношение для определения времени процесса.

В периоде падающей скорости сушки предложено решение нестационарного уравнения массопереноса, лимитирующей стадией процесса становится диффузия влаги внутри твердого тела. Также дано уравнение для расчета времени процесса.

Ключевые слова: Теория регулярного режима, решение задач нестационарного массопереноса, сушка.

Regular Regime Theory to Solve the Problems of Unsteady Mass Transfer During the Drying Process

D.Sc. Frolov S. V., *D.Sc.* Kutsakova V. E.,
Ph.D Shkotova T. V.

National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics
Institute of Refrigeration and Biotechnologies
191002, St. Petersburg, Lomonosov str., 9

Фролов С.В. и др. Теория регулярного режима в решениях задач нестационарного массопереноса в процессе сушки / С.В. Фролов, В.Е. Куцакова, Т.В. Шкотова // Научный журнал НИУ ИТМО. Серия «Процессы и аппараты пищевых производств», 2013. - №4. [Электронный ресурс]: http://www.processes.ihbt.ifmo.ru

The article proposes the use of the regular regime theory to solve the problems of unsteady mass transfer during the drying process. Until now, only classical solutions for bodies of simple shape have been presented with a number of assumptions. At the same time, most food products are bodies of complex shape. The paper proposes the formulation and solution of quasionedimensional differential equation with the relevant uniqueness conditions. The article shows that at constant speed of drying the equation becomes steady-state and its solution is a parabolic profile of humidity.
The paper also gives an estimated ratio to determine the time of the process.
The article provides a solution to the equation of unsteady mass transfer during the period of falling drying speed. The limiting step of the process is the diffusion of moisture within a solid body. We also have an equation to calculate the time of the process.
Keywords: regular regime theory, solution of problems of unsteady mass transfer, during

Сушка материалов представляет собой удаление влаги, молекулы которой не утратили своей индивидуальности. Следует учитывать, что часть влаги в продукте находится в свободном состоянии, а другая часть связана с твердым скелетом характер этой связи оказывает влияние как на скорость удаления влаги, так и на механизм её перемещения в виде жидкости или пара. Это обстоятельство имеет огромное значение особенно при сушке пищевых продуктов. При тепловой сушке влага, испаряемая с поверхности материала и удаляемая в среду сушильной камеры, защищает поверхность продукта от перегрева (охлаждающее действие испарения). Этот механизм описывает первый период или период постоянной скорости сушки.

Если же нужно еще преодолеть силу притяжения молекул воды твердым скелетом продукта, то молекуле воды нужно существенно большее количество энергии, которое тратится на совершение работы её отрыва от скелета и последующее испарение. Следовательно, температура продукта будет возрастать. Этот механизм относится ко второму периоду или периоду падающей скорости сушки, который описывается уравнениями нестационарного массопереноса или диффузии.

Одной из основных задач аналитической теории сушки является решение системы дифференциальных уравнений массопереноса при соответствующих условиях однозначности, что дает возможность описать поля влажности в теле в любой момент времени. А также, используя теорему о среднем отыскать средние значения влажности в любой момент времени.

Если при принятии ряда допущений, возможно аналитическое решение этих уравнений для тел простой формы, то для тел сложной формы каковыми и является большая часть пищевых продуктов, таких решений нет.

Для решения этой весьма сложной задачи нами предложено использовать положения теории регулярного режима, с помощью которой можно получить расчетное уравнения времени процесса сушки тел любой формы.

1. Первый период.
(период постоянной скорости сушки)

В первом периоде сушки поток влаги с поверхности тела постоянен и определяется внешними условиями. Математическая постановка задачи выглядит следующим образом. Во-первых, используем квазиодномерное уравнение диффузии:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{k}{x}\frac{\partial w}{\partial x}\right); k = \frac{1}{\Phi} - 1; \Phi = \frac{V}{SR}. \quad (1)$$

Здесь w – безразмерная влажность тела, кг влаги/кг массы тела; τ – время, с; D – осредненный коэффициент диффузии, м^2/с; x – координата поперёк тела, м, x = 0 отвечает центру тела, x = R – поверхности тела; R – характерный размер тела, понимаемый как расстояние от поверхности тела до его центра (максимально удалённой от поверхности точке в глубине тела), м; k – безразмерный коэффициент, выражаемый через безразмерный коэффициент формы тела Ф (бесконечной пластине отвечает k = 0, Ф = 1; бесконечному цилиндру k = 1, Ф = ½; шару k = 2, Ф = 1/3); V – объём тела, м^3; S – площадь поверхности тела, м^2. Далее, граничные условия к уравнению (1):

$$\frac{\partial w}{\partial x}(0, \tau) = 0; -D\rho\frac{\partial w}{\partial x}(R, 0) = q. \quad (2)$$

Здесь ρ – плотность тела, кг/м^3; q – поток влаги с единицы поверхности тела за единицу времени, кг/(м^{2}с), определяемый внешними условиями. Первое из условий (2) – условие симметрии распределения влажности; второе – условие второго рода: постоянство потока влаги с поверхности.

Стационарным решением уравнения (1) с условиями (2) является параболический профиль влажности:

$$w = w_b - \frac{q}{R\rho}\left((k+1)\tau - \frac{(k+1)R^2 - (k+3)x^2}{2(k+3)D}\right). \quad (3)$$

Здесь w_b – начальная влажность тела. Усредняя выражение (3) по координате x, получим выражение для средней влажности (следует помнить, что усреднение должно проводиться с весом x^k):

$$\bar{w}(\tau) = \frac{\int_0^R x^k w(x,\tau)dx}{\int_0^R x^k dx} = w_b - \frac{q(k+1)}{R\rho}\tau \tag{4}$$

Последнее слагаемое в (3) нами специально было подобрано так, чтобы давать ноль при усреднении. Продолжительность первого периода составит:

$$\tau_1 = \frac{\Phi(w_b - w_{cr})R\rho}{q} \tag{5}$$

Здесь w_{cr} – критическая влажность, при которой первый период сушки заканчивается.

Частный случай изложенной теории (для бесконечной пластины, то есть при $k = 0$) приведён в [1].

2. Второй период.
(период падающей скорости сушки)

Во втором периоде поток влаги с поверхности убывает во времени (скорость сушки падает) и определяется уже не внешними условиями, а диффузией влаги внутри тела. Уравнение диффузии (1) и первое из граничных условий (2) те же, а вот на поверхности тела имеем граничное условие 3-го рода:

$$-D\frac{\partial w}{\partial x}(R,\tau) = \beta\left(w(R,\tau) - w_e\right). \tag{6}$$

Здесь β – коэффициент массоотдачи, м/с; w_e – равновесная влажность (при которой процесс сушки прекращается). Также из соотношения (3) для конца первого периода получаем начальное условие:

$$w(x,0) = w_{cr} + \frac{q}{R\rho}\frac{(k+1)R^2 - (k+3)x^2}{2(k+3)D} \tag{7}$$

Приведём задачу к безразмерному виду. Введём безразмерные переменные и критерии:

$$E=\frac{w-w_в}{w_{cr}-w_в};\ Fo=\frac{D\tau}{R^2};\ \xi=\frac{x}{R};\ Bi=\frac{\beta R}{D};\ \eta=\frac{qR}{\rho D}.$$

Здесь E – безразмерная влажность; Fo – безразмерное время (критерий Фурье); ξ – безразмерная координата; Bi – безразмерный критерий Био; η – безразмерный критерий, смысл которого: отношение характерной скорости влагоотдачи с поверхности в первом периоде к характерной скорости передачи влаги внутри тела. В безразмерных переменных задача выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial E}{\partial Fo}=\frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2}+\frac{k}{\xi}\frac{\partial E}{\partial \xi};\ \frac{\partial E}{\partial \xi}(0,Fo)=0;-\frac{\partial E}{\partial \xi}(1,Fo)=BiE(1,Fo);$$

$$E(\xi,0)=1+\eta\frac{(k+1)-(k+3)\xi^2}{2(k+3)} \qquad (8)$$

Строго говоря, задача (8) имеет точное решение в функциях Бесселя. Однако решение трансцендентных уравнений с функциями Бесселя не самая удобная форма практических расчётов. Ранее [2] нами предлагался способ приближенного решения похожей задачи (получающийся из (8) при η = 0) [3], основанный на прямом вариационном методе. Приведём основные результаты. Решение апроксимировалось степенной функцией:

$$\theta(\xi,Fo)\approx\left(1-\frac{Bi}{Bi+b}\xi^b\right)\exp\left(-\mu_1{}^2 Fo\right),\ b=\frac{\sqrt{2k+6}-k+1}{2}, \qquad (9)$$

где безразмерное $\mu_1{}^2$ – первое собственное число краевой задачи (8). Для $\mu_1{}^2$ было получено выражение:

$$\mu_1{}^2\approx\frac{Bi(k+1)(Bi+\sqrt{2k+6})(k+2\sqrt{2k+6}+5)}{4Bi^2+4(\sqrt{2k+6}+2)Bi+\sqrt{2k+6}(k+2\sqrt{2k+6}+5)} \qquad (10)$$

Среднеобъёмная же влажность определяется так:

$$\overline{E}=A_v\exp\left(-\mu_1{}^2 Fo\right);$$

$$A_v \approx \frac{\int_0^1 \xi^k \left(1 - \frac{Bi}{Bi+b}\xi^b\right) d\xi}{\int_0^1 \xi^k \left(1 - \frac{Bi}{Bi+b}\xi^b\right)^2 d\xi} \frac{\int_0^1 \xi^k \left(1 - \frac{Bi}{Bi+b}\xi^b\right)\left(1 + \eta \frac{(k+1)-(k+3)\xi^2}{2(k+3)}\right) d\xi}{\int_0^1 \xi^k d\xi}$$

Вычисляя интегралы, получим:

$$A_v \approx \frac{(2Bi + k + \sqrt{2k+6} + 3)^2 \sqrt{2k+6}}{\left(4Bi^2 + 4(\sqrt{2k+6} + 2)Bi + \sqrt{2k+6}(k + 2\sqrt{2k+6} + 5)\right)(k+3)} \times$$

$$\times \left(1 + \eta \frac{4Bi(k+1)}{(k+3)\left(2Bi + k + \sqrt{2k+6} + 3\right)\left(k + \sqrt{2k+6} + 7\right)}\right) \qquad (11)$$

Итоговая продолжительность второго периода сушки, которая проходит до заданной конечной влажности w_{end} определяется как:

$$Fo_2 = \frac{1}{\mu_1^2} \ln \frac{A_v}{E}$$

В размерном виде:

$$\tau_2 = \frac{R^2}{\mu_1^2 D} \ln\left(A_v \frac{w_{cr} - w_e}{w_{end} - w_e}\right) \qquad (12)$$

В качестве примера рассмотрим сушку сухаря, используя данные из [1]. Сухарь имеет форму бесконечной пластины (то есть $k = 0$, $\Phi = 1$), начальная влажность $w_b = 0{,}84$; критическая влажность $w_{cr} = 0{,}71$. Равновесную влажность примем равной $w_e = 0{,}04$ (равновесная влажность при относительной влажности воздуха 10%, что отвечает температуре сушки 100 ^{0}C, см. [4]); конечную $w_{end} = 0{,}1$. Характерный размер сухаря $R = 0{,}01$ м; поток массы с поверхности в первом периоде $q = 2{,}1\ 10^{-4}$ кг/м^{2}с; коэффициент диффузии $D = 1{,}3\ 10^{-9}$ м^2/с. Тогда по формуле (5) продолжительность первого периода $\tau_1 = 26$ с. Далее, число Био $\mathrm{Bi} = 1{,}8\ 10^5$, что практически бесконечность, то есть надо взять пределы выражений (10) и (11) при $\mathrm{Bi} \to \infty$:

$$\mu_1^{\,2} \approx \frac{(k+1)(k+2\sqrt{2k+6}+5)}{4};\; A_v \approx \frac{\sqrt{2k+6}}{k+3}\left(1+\frac{2\eta(k+1)}{(k+3)(k+\sqrt{2k+6}+7)}\right)$$ Кри

терий η = 6,5; μ_1^2 = 2,47; A_v = 1,20. Тогда рассчитанная по соотношению (12) продолжительность второго этапа составит τ_2 = 1343 мин = 22,4 часа.

Список литературы:

1. Гинзбург А.С. Основы теории и техники сушки пищевых продуктов. М., Пищевая промышленность, 1973. – 528 с.

2. Фролов С.В., Мереминский Г.И., Поляков К.Ю. Расчет времени охлаждения пищевых объектов методом квазиодномерного приближения // Вестник МАХ, вып. 3, 2004, с. 42 – 44.

3. Фролов С.В., Багаутдинова А.Ш. Высшая математика. Этюды по теории и приложениям. СПб, ГИОРД, 2012. – 576 с.

4. Гинзбург А.С., Савина И.М. Массовлагообменные характеристики пищевых продуктов. М., Лёгкая и пищ. пр-сть, 1982. – 280 с.