

УДК 665+602.1:519

## **К вопросу об описании гидромеханического процесса осаждения твердых частиц в жидкой среде**

*Д-р. техн. наук* Вороненко Б.А. voronenkoboris@mail.ru

*Д-р. техн. наук* Пеленко В.В. pro1@gunipt.spb.ru

Поляков С.В.

*Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет ИТМО*

*Институт холода и биотехнологий*

*191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9*

*Приведено решение интегро-дифференциального уравнения осаждения твердых частиц в жидкости, разработана программа и осуществлено компьютерное исследование полученных решений.*

*Ключевые слова:* осаждение, плотность, компьютерное исследование, формула Стокса.

---

## **On the deposition process herein hydromechanical solids in a liquid medium**

*D.Sc. Voronenko B.A., D.Sc. Pelenko V.V., Polyakov S.V.*

*Saint-Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics.*

*Institute of Refrigeration and Biotechnology*

*191002, St. Petersburg, Lomonosov str., 9*

*A solution of the integral-differential equation of the precipitation of solids in the liquid, and carried out a program of computational study of the solutions.*

*Keywords:* precipitation, density, computer research, Stokes formula.

В работах [1,2] исследован гидромеханический процесс осаждения твердых (жидких) частиц в жидкой (газовой) среде в связи с получением более чистых материалов.

Для нестационарных условий и при движении твердых частиц в жидкости близкой плотности выбрана формула Буссинеска для силы сопротивления движущемуся в жидкости телу:

$$\vec{F}_{\text{сопр}}(t) = -6\pi\mu R\vec{W}(t) - \frac{2}{3}\pi\rho R^3 \frac{d\vec{W}(t)}{dt} - 6\pi\mu R \left[ \frac{R}{\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t \frac{d\vec{W}(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} - \frac{2R}{\sqrt{\pi\nu}} \vec{W}(0) \right], \quad (1)$$

где

$W$  – скорость потока, обтекающего частицу (вдали от нее);

$R$  – радиус шарообразной частицы;

$t$ , – время;

$\mu$ ,  $\nu$  – динамический и кинематический коэффициенты вязкости соответственно;

$\rho$  – плотность жидкой среды;

В формуле Буссинеска первый член представляет собой стационарную формулу Стокса (силу сопротивления Стокса), второй – инерционную составляющую силы сопротивления, учитывающую присоединенную массу жидкости (шара), третье слагаемое – так называемая сила Бассе, четвертое – боковая (подъемная) сила Саффмэна. Сила Бассе обычно включается в выражение для силы сопротивления движущейся частице, если сила межфазного взаимодействия зависит от предыстории движения частиц при их нестационарном движении. Пренебрежение слагаемыми типа силы Бассе и силы Саффмэна, значительно упрощает описание движения дисперсной частицы [1-13].

Учитывая, что шару, погруженному в вязкую жидкость, невозможно мгновенно сообщить конечную скорость [2], принимаем  $W(0)=0$ .

Преобразованное интегро-дифференциальное уравнение (1) решено аналитически [1,2] методами математической физики для двух возможных случаев: 1) плотность жидкости больше плотности тела – частичек жира, газовых пузырьков; 2) плотность жидкости меньше плотности тела.

При  $\rho < \rho_1$ , т.е.  $\alpha > \beta$  (плотность жидкости меньше плотности тела), выражение для скорости осаждения частиц имеет вид (соответствует поставленной задаче удаления нежировых примесей):

$$\begin{aligned}
 W(t) = \frac{f_0}{\alpha^2} & \left[ 1 + e^{-\alpha^2 \left(1 - 2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\right) t} \cdot \left( \frac{1 - 2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}{\alpha \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}} A_1 + \frac{2\beta}{\alpha^2} A_2 \right) \cos(2\beta\sqrt{t}) \right. \\
 & \left. + \left( \frac{2\beta^2}{\alpha^2} A_1 - \frac{1 - 2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}{\alpha \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}} A_2 \right) \sin(2\beta\sqrt{t}) \right], \quad (2)
 \end{aligned}$$

где

$$A_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\beta^2 t} \left( \alpha \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2} \varphi_1 + \beta \varphi_2 \right) - \alpha \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2} \operatorname{erfc}(\beta\sqrt{t}) ;$$

$$A_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\beta^2 t} \left( \beta \varphi_1 - \alpha \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2} \varphi_2 \right) - \beta \operatorname{erfc}(\beta\sqrt{t}) ;$$

$$\varphi_1 = \int_0^{\alpha \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2} t} e^{y^2} \sin(2\beta\sqrt{t} y) dy; \quad \varphi_2 = \int_0^{\alpha \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2} t} e^{y^2} \cos(2\beta\sqrt{t} y) dy.$$

$$\alpha^2 = \frac{9\mu}{2R^2\left(\rho_1 + \frac{\rho}{2}\right)}; \quad 2\beta = \frac{9\sqrt{\mu\rho}}{2R\left(\rho_1 + \frac{\rho}{2}\right)}; \quad f_0 = \frac{g(\rho_1 - \rho)}{\rho_1 + \frac{\rho}{2}}.$$

Разработана программа расчета скорости осаждения фракции твердых частиц. Компьютерное исследование показало, что при достаточно большом времени движения частицы в вязкой жидкости в уравнении (2) можно ограничиться только первым слагаемым:

$$W(t) = W_c = \frac{f_0}{\alpha^2} = \frac{2gR^2(\rho_1 - \rho)}{9\mu} = \frac{g(\rho_1 - \rho)}{18\mu} d_r^2, \quad (3)$$

где  $d_r$  - диаметр осаждающейся частицы.

Соотношение (3) – не что иное, как скорость осаждения (всплытия) при

$W_c = \text{const}$ , и является известной зависимостью, носящей название формулы Стокса, и справедливой в области чисел Рейнольдса  $10^{-4} < Re < 2$ .

Список литературы:

1. Вороненко Б.А. Решение задачи механической очистки пищевых сред. / Б.А. Вороненко, В.В. Пеленко, С.В. Поляков, В.Н. Марков // Научный журнал НИУ ИТМО. Серия «Процессы и аппараты пищевых производств», 2008. - №2. [Электронный ресурс]: <http://www.processes.ihbt.ifmo.ru>
2. Вороненко Б.А., Пеленко В.В., Поляков С.В. Постановка и решение задачи механической очистки пищевых сред. // Известия ВУЗов. Пищевая технология, №1, 2009, – С. 78 – 80.
3. Романков П.Г., Курочкина М.И. Гидромеханические процессы химической технологии. –Л.: Химия, 1982. –288 с.
4. Кук Г.А. Процессы и аппараты молочной промышленности. –М.: Пищевая промышленность, 1973. –768 с.
5. Вороненко Б.А., Марков В.Н., Кунилова Т.М. Аппаратурное оформление процесса первичной очистки растительных масел// Межвузовский сб.науч.трудов «Теория и практика разработки ресурсосберегающего пищевого оборудования», СПб: ГОУ ВПО «СПбГУНиПТ», 2006. –С.51-56.
6. Лурье А.И. Операционное исчисление и его приложение к задачам механики. – М. –Л.: Гостехиздат, 1950. –432 с.
7. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Учеб. для вузов. –7-е изд. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.
8. Протодьяконов И.О., Чесноков Ю.Г. Гидромеханические основы процессов химической технологии. –Л.: Химия, 1987. – 360 с.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. –М.: Гостехиздат, 1953. – 788 с.
10. Наумов В.А. Влияние силы Бассе на динамику твердых частиц в придонном слое. // Сб.науч.трудов «Теоретические и практические аспекты применения инженерной физико-химической механики с целью совершенствования и интенсификации технологических процессов пищевых производств», Моск.госуд.университет прикладной биотехнологии, - М.: 2002. – С.257-260.
11. Мартыненко В.С. Операционное исчисление.–Киев.:Высш.шк.,1990.–359 с.
12. Лыков А.В. Теория теплопроводности. –М.: Высшая шк., 1967. –600 с.
13. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. –М.: Физматгиз, 1963. –1100 с.