

УДК 621.514

## Численный метод расчета время замораживания продуктов шаровой формы

Проф. Эглит А. Я. [fil24725@yandex.ru](mailto:fil24725@yandex.ru)

Филатов А. С. [filatov\\_alex037@mail.ru](mailto:filatov_alex037@mail.ru)

Университет ИТМО

191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9

*В статье описаны трудности, возникающие при расчете время замораживания продуктов шаровой формы аналитическими методами, а так же проблемы определения температурного поля замораживаемого продукта на разных этапах процесса. Предлагается метод решения задач замораживания продуктов шаровой формы с помощью применения численного метода элементарных тепловых балансов. Приводится математическая модель численного метода и алгоритм программы определения времени замораживания. Дается количественная оценка проблемы, связанной с неравномерностью распределения тепловой нагрузки на испарительную систему флюидизационного аппарата непрерывного действия в ходе технологического процесса. Представлены варианты более равномерного распределения тепловой нагрузки по длине скороморозильного аппарата.*

**Ключевые слова:** флюидизационный аппарат, технологический режим, холодильное оборудование, численный метод, повышение эффективности.

---

## A numerical method for calculating the spherical products freezing time

Prof. Eglit A. Y. [fil24725@yandex.ru](mailto:fil24725@yandex.ru)

Filatov A. S. [filatov\\_alex037@mail.ru](mailto:filatov_alex037@mail.ru)

University ITMO

191002, Russia, St. Petersburg, Lomonosov str., 9

*The article describes the difficulties in calculating the freezing time of spherical products by analytical methods, as well as the problem of determining the temperature field of frozen products at different stages of the process. A method of freezing spherical products by applying a numerical method of elementary heat balances is suggested. In this article the mathematical model of the numerical method and the algorithm is determining the freezing time is provided. There is the quantitative evaluation of the problem which is related to uneven heat load distribution on the evaporator system of fluidizing apparatus during continuous technological process. There are variants of a more evenly heat load distributing along the freezers given in the article*

**Keywords:** fluidized unit, technological mode, refrigeration equipment, numerical method, increase of efficiency.

Для расчета время замораживания продуктов шаровой формы Международный институт холода рекомендует формулу Планка [9].

$$\tau_0 = \frac{\Delta i}{2\Delta t} \gamma_e \left( \frac{l_e}{A\alpha} + \frac{l_e^2}{B\lambda_e} \right), \quad (1)$$

где:  $\Delta i$  – разница энтальпий продукта между начальной температурой  $t_0$  и конечной  $t_e$ , кДж/(кг·К),  $\Delta i = i_0 - i_e$ ;

$\Delta t$  – средняя разница температур между криоскопической температурой продукта  $t_{кр}$  и температурой охлаждающей среды, °С,  $\Delta t = t_{кр} - t_m$ ;

$\gamma_e$  – удельная масса замороженного продукта, кг/м<sup>3</sup>;

$l_e$  – толщина продукта в замороженном состоянии (измеренная в термическом центре тела), м;

$\alpha$  – коэффициент теплоотдачи от поверхности продукта к охлаждающей среде, Вт/(м<sup>2</sup>·К);

$\lambda_e$  – коэффициент теплопроводности продукта в замороженном состоянии, Вт/(м·К).

$A$  и  $B$  – коэффициенты зависящие от формы замораживаемого тела, для шара соответственно 3 и 12;

Имеется ряд допущений, которые необходимо учитывать при использовании данной формулы [2]:

1. В замороженной части теплоёмкость равна нулю.
2. Льдообразование в продукте происходит при постоянной температуре (криоскопической).
3. Теплофизические свойства замороженной части не зависят от температуры.
4. Перед началом замораживания тело охлаждено до криоскопической температуры.
5. Температура хладоносителя и коэффициент теплоотдачи постоянны на протяжении всего процесса, тепло однородно и плотность его в процессе замораживания не изменяется.

Определять время замораживания с высокой степенью точности возможно только при выполнении всех допущений. Для компенсации этих допущений предлагается набор формул [1], позволяющих внести положительную или отрицательную добавку в общее время замораживания.

Поправка на теплоемкость замороженной части  $\tau_1$ , в некоторых случаях составляет примерно 6÷9 % от общей продолжительности процесса замораживания, рассчитываем по формуле:

$$\tau_1 = \frac{\rho \cdot c \cdot R^2}{\lambda} \cdot \frac{1 + \ln\left(1 + \frac{0.65}{Bi^*}\right)}{4 + 2|k - 1|} \quad (2)$$

где:  $R$  – радиус ягоды, м;

$\rho$  – плотность, кг/м<sup>3</sup>;

$c$  – удельная теплоемкость замороженной части, Дж/(кг·К);

$\lambda$  – теплопроводность замороженной части ягод, Вт/(м·К);

$Bi$  – критерий Био.

Критерий Био определяется по формуле:

$$Bi = \frac{\alpha \cdot R}{\lambda}; Bi = Bi^* \text{ при } k = 2 \text{ (} k > 1 \text{)} \quad (3)$$

Наибольшее значение имеет отрицательная поправка [3], учитывающая постепенное вымораживание воды  $\tau_2$ , она составляет около 20% от времени замораживания, рассчитывается по формуле:

$$\tau_2 = \frac{q \cdot \omega \cdot \rho \cdot R^2}{\lambda \cdot (t_{кр} - t_{хл})} \cdot F(Bi, a, k); \quad (4)$$

Функцию  $F(Bi, a, k)$  определяем из таблиц [4]

где:  $a$  – некоторая безразмерная константа,  $a \ll 1$

$$a = \frac{t_0 - t_{кр}}{t_{кр} - t_{хл}}$$

$k$  – безразмерный коэффициент формы;

$t_0$  – температура замерзания чистой воды, °С.

Поправка на изменение теплопроводности замороженной части  $\tau_3$ , составляет примерно 4÷6 % и рассчитывается по формуле:

$$\tau_0 = \Phi \cdot \frac{q \cdot \omega \cdot \rho \cdot R^2}{(t_{кр} - t_{хл})} \cdot \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda^2} \cdot \frac{b \cdot (Bi + 2)}{2 \cdot Bi} \cdot \ln\left(1 + \frac{Bi}{b \cdot (Bi + 2)}\right) \quad (5)$$

где:  $\lambda_0$  – теплопроводность незамороженной части продукта, Вт/(м·К).

$$b = \frac{2 \cdot \lambda_0 + \lambda}{3 \cdot \lambda_0} \cdot a \quad (6)$$

Поправка на начальную температуру тела складывается из  $\tau_4$  и  $\tau_{\text{охл}}$  это наибольшая из положительных поправок, оставляющая примерно около 15%.

Значение  $\tau_4$  рассчитывается по следующей формуле:

$$\tau_4 = \Phi \cdot c_0 \cdot \rho \cdot R \cdot \frac{\bar{t}_0 - t_{\text{кр}}}{t_{\text{кр}} - t_{\text{хл}}} \cdot \left( \frac{R}{\lambda} \cdot \left( 2 + \frac{A \cdot \chi_0}{k + 1} \cdot \frac{Bi + 2}{Bi} \right)^{-1} + \frac{1}{\alpha} \right) \quad (7)$$

где:

$$A = \frac{\lambda_0 \cdot q \cdot \omega}{c_0 \cdot (t_{\text{кр}} - t_{\text{хл}}) \cdot \lambda} \quad (8)$$

$$\chi_0 = \frac{(k + 1) \cdot (k + 5 + 2\sqrt{2 \cdot k + 6})}{4} \quad (9)$$

$c_0$  – удельная теплоемкость незамороженной части, Дж/(кг·К).

Температуру начала замораживания  $t_{\text{н}}$  (температуру незамороженного тела) рассчитываем по формуле

$$\tau_{\text{н}} = t_{\text{хл}} + (t_{\text{кр}} - t_{\text{хл}}) \cdot \frac{A_{\text{об}}}{A_{\text{пов}}} \quad (10)$$

При определении  $t_{\text{н}}$  значение  $A_{\text{об}}$  принимаем равным единице, а  $A_{\text{пов}}$  рассчитываем по формуле:

$$\frac{A_{\text{пов}}}{A_{\text{об}}} = \frac{\Phi}{Bi} \chi \quad (11)$$

Значение  $\chi_{\text{н}}$  рассчитываем по формуле:

$$\chi_{\text{н}} = \frac{Bi_{\text{н}} \cdot (k + 1) \cdot (k + 5 + 2\sqrt{2 \cdot k + 6}) \cdot (Bi_{\text{н}} + \sqrt{2 \cdot k + 6})}{4 \cdot (\sqrt{2 \cdot k + 6} + 2 + Bi_{\text{н}}) \cdot Bi_{\text{н}} + \sqrt{2 \cdot k + 6} \cdot (k + 5 + 2\sqrt{2 \cdot k + 6})} \quad (12)$$

$Bi_{\text{н}}$  – по соотношению:

$$Bi_{\text{н}} = \frac{\alpha \cdot R}{\lambda_0} \quad (13)$$

Продолжительность охлаждения  $\tau_{\text{охл}}$  рассчитываем по формуле:

$$\tau_{\text{охл}} = \frac{1}{m_{\text{н}}} \ln \left\{ A_{\text{пов}} \cdot \frac{t_{\text{нач}} - t_{\text{хл}}}{t_{\text{кр}} - t_{\text{хл}}} \right\} \quad (14)$$

где:

$$m_{\text{н}} = \frac{\lambda_0}{c_0 \cdot \rho \cdot R^2} \cdot \chi_{\text{н}} \quad (15)$$

В результате общее время замораживания составляет:

$$\tau_{\text{зам}} = \tau_0 + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 \quad (16)$$

Общее время процесса:

$$\tau_{\text{общ}} = \tau_{\text{охл}} + \tau_{\text{зам}} \quad (17)$$

Общим минусом такой методики оценки время замораживания является невозможность корректного определения температурного поля ягоды [8] на разных этапах замораживания путем замены его спорной среднеобъемной температурой.

Альтернативой аналитическим методам расчета времени замораживания может быть численный метод элементарных тепловых балансов А. П. Ваничева [6]. Для составления математической модели рассматриваемый продукт (клубника) представлен в виде шара радиусом  $R$ , разделен на  $n$ -е количество слоёв (см. рисунок 1). Каждый  $i$ -тый слой в момент времени  $\tau$ , характеризуется температурой, удельной теплоёмкостью, плотностью, теплопроводностью [11].

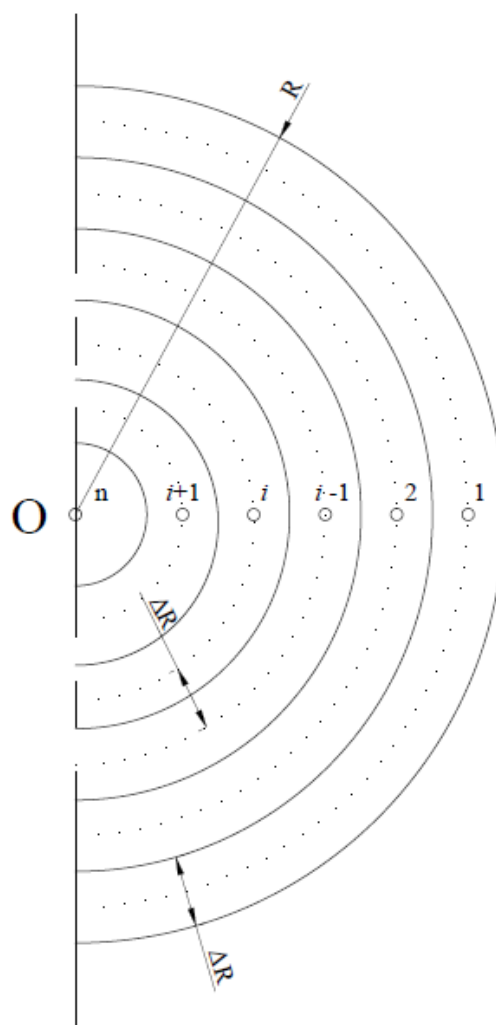


Рис. 1 Схема разделения продукта на элементы

Для нахождения температуры в любой точке шара в любой момент времени необходимо составить уравнение теплового баланса [4] для каждого слоя в каждый промежуток времени. При составлении теплового баланса для  $i$ -го слоя шара, в силу его достаточно малой толщины, теплофизические свойства в ходе процесса охлаждения принимаются постоянными, при достижении температуры слоя значения криоскопической температуры теплофизические свойства изменяются на значения соответствующие замороженному продукту и остаются неизменными до конца процесса. Тогда изменение теплосодержания  $i$ -го слоя можно определить из выражения:

$$Q_i^{i-1} + Q_i^{i+1} = c \cdot m_i \cdot (t_x - t_i) = m_i \cdot (h_x - h_i) \tag{18}$$

где:  $t_x, h_x$  – соответственно температура и энтальпия  $i$ -го слоя в момент времени  $(\tau + \Delta \tau)$ .

$t_i, h_i$  – соответственно температура и энтальпия  $i$ -го слоя в момент времени  $\tau$ .

$m_i$  – масса этого слоя, кг;

$Q_i^{i-1}$  – количество теплоты, отводимое от  $i$ -го слоя к внешнему ( $i-1$ ) слою за время  $\Delta \tau$ .

$Q_i^{i+1}$  – количество теплоты, получаемое  $i$ -м слоем от внутреннего  $(i+1)$  слоя за время  $\Delta\tau$ .

Количество теплоты, отводимое от  $i$ -го слоя к внешнему  $(i-1)$  слою за время  $\Delta\tau$ , можно определить из следующего выражения:

$$Q_i^{i-1} = \Delta\tau \cdot \frac{t_i - t_{i-1}}{\Delta R} \cdot \lambda_{i-1} \cdot F_i, \text{ Дж} \quad (19)$$

Количество теплоты, получаемое  $i$ -м слоем от внутреннего  $(i+1)$  слоя за время  $\Delta\tau$ , определяется из выражения:

$$Q_i^{i+1} = \Delta\tau \cdot \frac{t_{i+1} - t_i}{\Delta R} \cdot \lambda_{i+1} \cdot F_{i+1}, \text{ Дж} \quad (20)$$

где:  $F_i$  – площадь наружной поверхности  $i$ -го слоя,  $\text{м}^2$ ;

$F_{i+1}$  – площадь наружной поверхности  $(i+1)$ -го слоя,  $\text{м}^2$ ;

Для внешнего слоя шара количество теплоты, отводимое к охлаждающей среде, характеризуется теплоотдачей с поверхности охлаждаемого продукта и может быть определено по формуле:

$$Q_1 = \alpha \cdot F_1 \cdot (t_1 - t_{\text{пм}}) \cdot \Delta\tau, \text{ Дж} \quad (21)$$

где:  $t_1$  – температура наружного слоя,  $^{\circ}\text{C}$ ;

$t_{\text{пм}}$  – температура воздуха в аппарате,  $^{\circ}\text{C}$ .

Площадь наружной поверхности  $i$ -го слоя:

$$F_i = 4 \cdot \pi \cdot (R - (i - 1) \cdot \Delta R)^2, \text{ м}^2 \quad (22)$$

Массу  $i$ -го слоя можно определить из выражения:

$$m_i = V_i \cdot \rho_i, \text{ кг} \quad (23)$$

где:  $V_i$  – объём  $i$ -го слоя,  $\text{м}^3$ ;

$\rho_i$  – плотность  $i$ -го слоя,  $\text{кг}/\text{м}^3$ .

Объём  $i$ -го шарового слоя:

$$V_i = \frac{4}{3} \pi ((R - (i - 1) \cdot \Delta R)^3 - (R - i \cdot \Delta R)^3), \text{ м}^3 \quad (24)$$

где:  $i$  – номер слоя.

$R$  – радиус продукта, м

$\Delta R$  – толщина слоя, м.

Подставляя в выражение (18) выражения (20) и (21) получаем для наружного слоя уравнение баланса теплоты. После подстановки выражаем  $h_x$  в исходном виде, для внешнего слоя уравнение выглядит следующим образом:

$$h_1^{\tau+\Delta\tau} = h_1^{\tau} - \frac{\Delta\tau}{m} \left[ (t_1^{\tau} - t_{\text{пм}}) \cdot F_1 \cdot \alpha + \frac{\lambda_2 \cdot (t_2^{\tau} - t_1^{\tau}) \cdot F_2}{\Delta R} \right] \quad (25)$$

Подставляя в выражение (18) выражения (19) и (20) получаем для слоёв расположенных между наружным и центральным уравнение баланса теплоты. После подстановки выражаем  $h_x$  в исходном виде, уравнение выглядит следующим образом:

$$h_x^{\tau+\Delta\tau} = h_i^{\tau} - \frac{\Delta\tau}{m} \left[ \frac{\lambda_i \cdot (t_i^{\tau} - t_{i-1}^{\tau}) \cdot F_i}{\Delta R} + \frac{\lambda_{i+1} \cdot (t_{i+1}^{\tau} - t_i^{\tau}) \cdot F_{i+1}}{\Delta R} \right] \quad (26)$$

Для центрального слоя необходимо исключить из уравнения (26) составляющую количества теплоты, получаемого  $i$ - м слоем от внутреннего ( $i+1$ ) слоя, тогда уравнение для центрального слоя принимает следующий вид:

$$h_n^{\tau+\Delta\tau} = h_n^{\tau} - \frac{\Delta\tau}{m} \left[ \frac{\lambda_n \cdot (t_n^{\tau} - t_{n-1}^{\tau}) \cdot F_n}{\Delta R} \right] \quad (27)$$

При выборе шага по времени для обеспечения сходимости модели необходимо соблюдать неравенство (для шара):

$$\frac{\lambda \cdot \Delta\tau}{c \cdot \rho \cdot (\Delta R)^2} \leq \frac{1}{3} \quad (28)$$

Из которого следует что шаг по времени:

$$\Delta\tau \leq \frac{c \cdot \rho \cdot (\Delta R)^2}{3 \cdot \lambda} \quad (29)$$

На рис. 2 представлен алгоритм, программы расчета температурного поля продукта шаровой формы при замораживании. Программа написана на языке Matlab. Исходными данными для работы программы являются радиус продукта, начальное распределение температуры, температура хладоносителя, коэффициент теплоотдачи с поверхности продукта, конечная температура продукта, количество слоев, на которые будет разделено тело, а так же теплофизические свойства продукта.



В начале расчета программа вычисляет значение времени одной итерации в соответствии с формулой (29). Затем определяются объём и масса каждого слоя, причем масса определяется для плотности до заморозки и после. После этого происходит перевод температуры в удельную энтальпию с помощью интерполяции данных представленных в [9].

Далее программа переходит в цикл, в котором итерационным способом идет определение энтальпии в каждом слое в соответствии с формулами (25), (26), (27). После каждой итерации идет перевод энтальпии в температуру и проверка температуры слоя на соответствие криоскопической температуре продукта, а так же конечной температуре заданной в начале программы. Если температура слоя выше криоскопической температуры, то теплофизические свойства остаются неизменными и программа, если продукт не достиг конечной температуры, переходит к следующей итерации. В момент, когда температура слоя становится равной криоскопической температуре, в слое происходит замена теплофизических параметров в соответствии с исходными данными. В результате каждой итерации программа вычисляет температуру слоя в момент времени  $(\tau + \Delta\tau)$ , после каждой итерации происходит перевод температуры в удельную энтальпию, так же как и в начальный момент времени. Адекватность предложенной математической модели проверена экспериментальными данными [1] и [9].

Особую ценность предлагаемая модель имеет при конструировании скороморозильных аппаратов [2]. Она позволяет дать корректную количественную оценку качественно понятной картине разбивки аппарата на зоны.

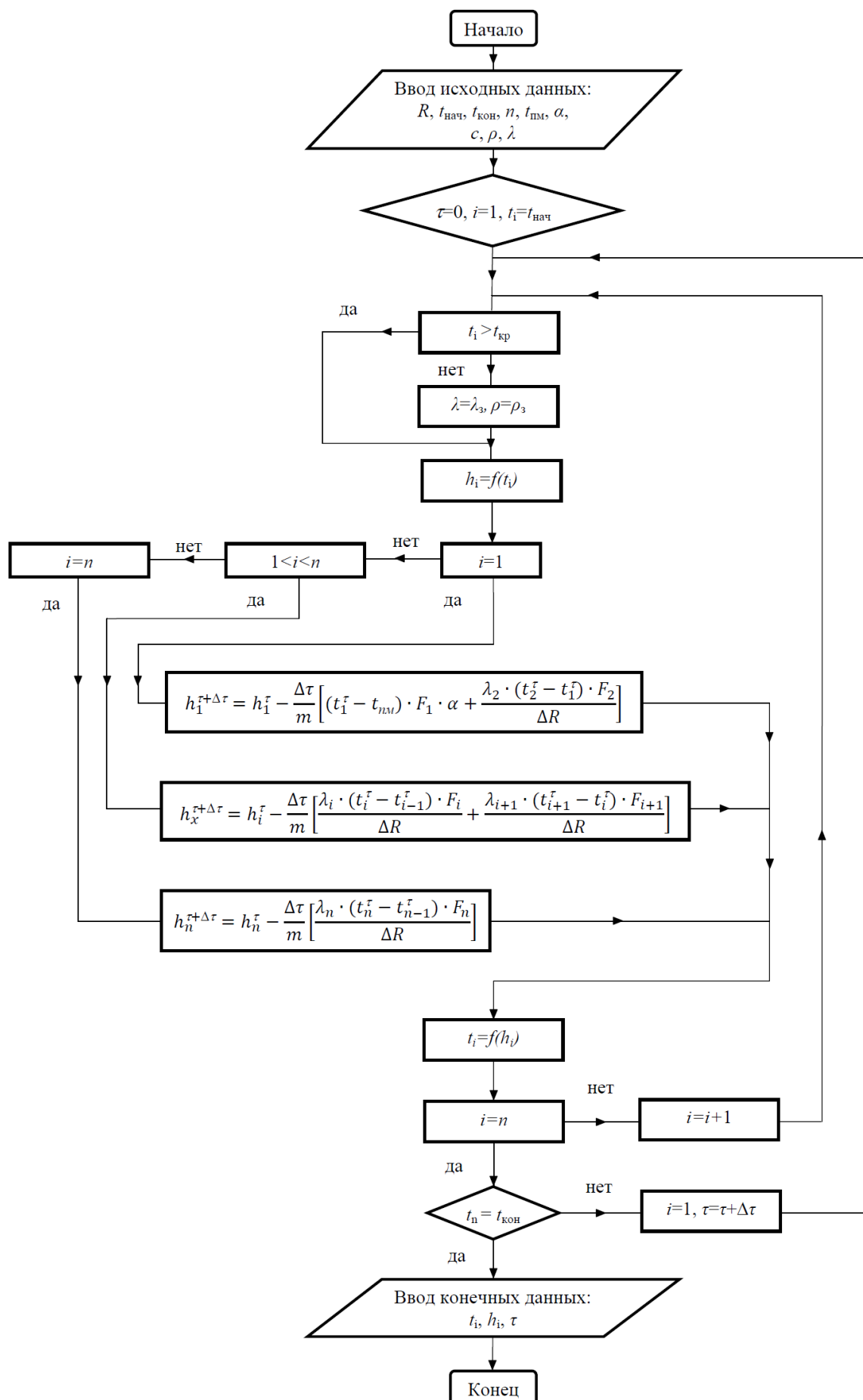


Рис. 2 Алгоритм расчета температурного поля продукта шаровой формы при замораживании

Так, предлагаемое в [9] изменение скорости воздуха во флюидизированном слое по длине аппарата, оправданное с позиции технологии, оказывается спорным с точки зрения холодоснабжения.

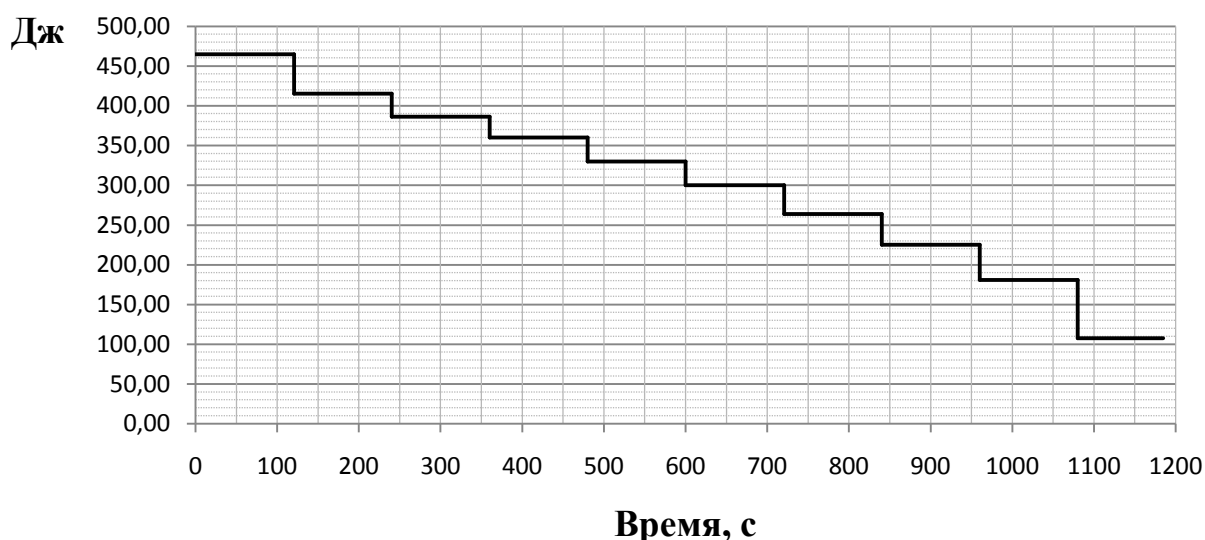


Рис. 3 Распределение количества теплоты во времени при замораживании продукта в ФМА

Как видно из рисунка 3 количество теплоты, отдаваемое ягодой, распределяется крайне неравномерно по длине аппарата. Еще большую неравномерность имеет теплоприток от продукта к воздуху рисунок 4.

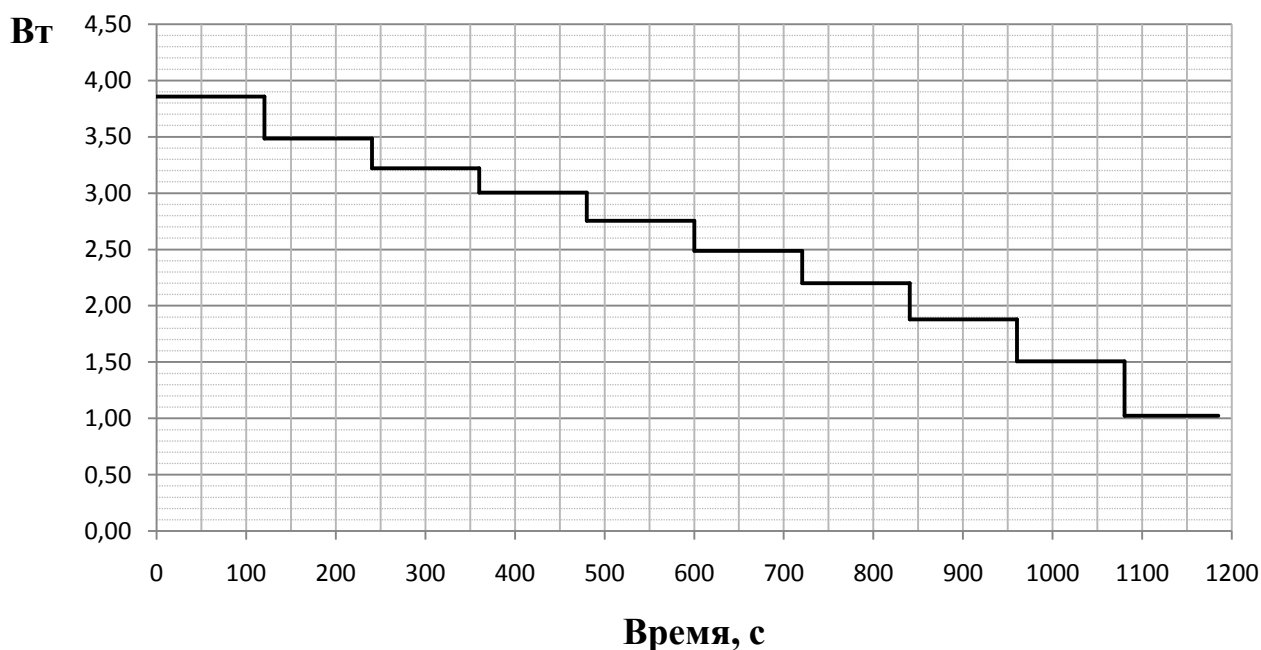


Рис. 4 Распределение тепловой нагрузки на испарительную систему от единичного продукта в ходе процесса замораживания в ФМА

Предлагаемая модель позволяет при проектировании скороморозильных аппаратов вести обоснованный поиск более равномерной тепловой нагрузки по длине аппарата и комбинировать параметры технологического процесса [10], что позволяет повышать эффективность флюидизационных скороморозильных аппаратов непрерывного действия с учетом сохранения общей продолжительности процесса.

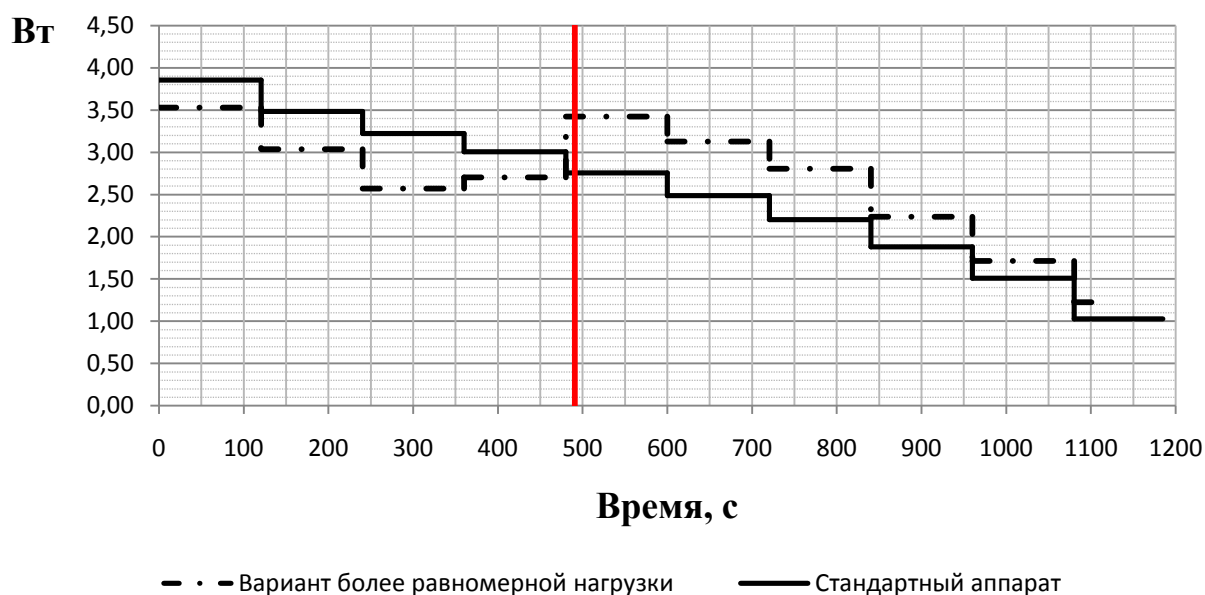


Рис. 5 Вариант более равномерного распределения тепловой нагрузки по длине аппарата

Применение численного метода в стандартной методике проектирования морозильных аппаратов при оценке время замораживания позволяет учитывать распределение температурного поля в обрабатываемом продукте, более точно определять распределение тепловой нагрузки на части испарительной системы аппарата. Так же данный метод может быть применен к определению времени замораживания многослойных тел, часто встречающихся в пищевой промышленности.

### Список литературы:

1. А. В. Бараненко, В. Е. Куцакова, Е. И. Борзенко, С. В. Фролов. Примеры и задачи по холодильной технологии пищевых продуктов. Ч.3. Теплофизические основы. – М.: КолосС, 2004. – 249 с.: ил. – (Учебники и учеб. пособия для студентов вузов).
2. Алмаши Э., Эр дели Л., Шарой Т. Быстрое замораживание пищевых продуктов: Перевод с венгерского – М.: Легкая и пищевая промышленность, 1981, 408 с.
3. Куцакова В. Е., Рогов И. А., Фролов С. В., Филипов В. И. Примеры и задачи по холодильной технологии пищевых продуктов. Ч.1. Теоретические основы

консервирования/ М.: Колос, 2001.-136с.:ил.(Учебник и учеб. Пособия для студентов вузов).

4. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967.
5. Маак В., Эккерт Г.-Ю., Кошпен Жан-Луи. ПОЛЬМАНН. Учебник по холодильной технике: Основы-Комплекующие-Расчеты. Изд-во МГУ 1998, 1142 стр
6. Михеев М.А., Михеева И. М. Основы теплопередачи. Изд. 2-е, стереотип. М., «Энергия», 1977.
7. Фикийн А.Г. Физические условия флюидизационного замораживания фруктов и овощей. // Холодильная техника, 1980, № 7, с. 5961.
8. Фролов С.В., Куцакова В.Е., Кипнис В.Л. Тепло- и массообмен в расчетах процессов холодильной технологии пищевых продуктов. -М.: Колос-Пресс, 2001, 144 с.
9. Я. Постольский, З. Груда. Замораживание пищевых продуктов // пер. с польского Ю. Ф. Заяса, И.Е. Фельдман. – М.: Пищевая промышленность, 1978. – 606 с.
10. Cleland A. C. and Earle R. L., A Comparison of methods for predicting the freezing times of cylindrical and spherical foodstuffs // Journal of food science -Vol. 44 (1979) p. 958-970
11. Fikiin K. A., Generalized numerical modelling of unsteady heat transfer during cooling and freezing using an improved enthalpy method and quasi-one-dimensional formulation // Int J. Refrig. Vol. 19, No. 2, p. 132-140, 1996

## References

1. A. V. Baranenko, V. E. Kucakova, E. I. Borzenko, S. V. Frolov. Examples and tasks of refrigerating technology of foodstuff. Ch.3. Heatphysical bases. – М.: KolosS, 2004. – 249 p.: il. – (Uchebniki i ucheb. posobija dlja studentov vuzov).
2. Almashi Je., Jer deli L., Sharoj T. Fast freezing of foodstuff: Translation from Hungarian – М.: Legkaja i pishhevaja promyshlennost', 1981, 408 p.
3. Kucakova V. E., Rogov I. A., Frolov S. V., Filipov V. I. Examples and tasks of refrigerating technology of foodstuff. P.1. Theoretical bases of conservation. –М.: Kolos, 2001.-136 p.:ил.(Uchebnik i ucheb. Posobija dlja studentov vuzov).
4. Lykov A. V. Heat conductivity theory. –М.: Vys`shaja shkola, 1967.
5. Maake V., Jekkert G.-Ju., Koshpen Zhan-Lui. POL"MANN. The textbook on refrigerating equipment: Osnovy-Komplektuyushchiye-Raschety. Izd-vo MGU 1998, 1142 p.
6. Miheev M.A., Miheeva I. M. Heat transfer bases. Izd. 2-e, stereotip. –М., «Jenergija», 1977.
7. Fikiin A.G. Physical conditions of flyuidizatsionny freezing of fruit and vegetables. // *Holodil'naja tehnika*. 1980, № 7, p. 5961.

8. Frolov S.V., Kucakova V.E., Kipnis B.JI. Warm and a mass exchange in calculations of processes of refrigerating technology of foodstuff. –M.: Kolos-Press, 2001, 144 p.
9. Ja. Postol'skij, Z. Gruda. Freezing of foodstuff // per. s pol'skogo Ju. F. Zajasa, I.E. Fel'dman. – M.: Pishhevaja promyshlennost', 1978. – 606 p.
10. Cleland A. C. and Earle R. L., A Comparison of methods for predicting the freezing times of cylindrical and spherical foodstuffs // *Journal of food science*. Vol. 44 (1979) p. 958-970
11. Fikiin K. A., Generalized numerical modelling of unsteady heat transfer during cooling and freezing using an improved enthalpy method and quasi-one-dimensional formulation // *Int J. Refrig.* Vol. 19, No. 2, p. 132-140, 1996